Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung

Mathematik

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i.d.F. vom 24.05.2002)

Inhaltsverzeichnis

Fachpräambel

Die Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 16.06.2000) beschreibt die grundlegenden Anforderungen an den Unterricht im mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld:

„Im mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld sollen Verständnis für den Vorgang der Abstraktion, die Fähigkeit zu logischem Schließen, Sicherheit in einfachen Kalkülen, Einsicht in die Mathematisierung von Sachverhalten, in die Besonderheiten naturwissenschaftlicher Methoden, in die Entwicklung von Modellvorstellungen und deren Anwendung auf die belebte und unbelebte Natur und in die Funktion naturwissenschaftlicher Theorien vermittelt werden."

Wissenschaftliche Expertisen stützen diese Anforderungen und betonen darüber hinaus den speziellen, unverzichtbaren Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung und Studierfähigkeit. Die allgemein bildende Funktion des Mathematikunterrichts wird insbesondere dadurch betont, dass er folgende Grunderfahrungen ermöglicht:

- Mathematik als ein deduktives System abstrakter Objekte mit einem Höchstmaß an innerer Vernetzung und Offenheit gegenüber Neuschöpfungen, neuen Ordnungen und Beziehungen (Mathematik als formale Wissenschaft),
- Mathematik als ein Reservoir an Modellen, die geeignet sind, Erscheinungen der Welt auf rationale Art zu interpretieren (Mathematik als anwendbare Wissenschaft),
- Mathematik als ideales Übungsfeld zum Erwerb allgemeiner Problemlösefähigkeiten (Mathematik als Mittel zur Ausbildung heuristischer Fähigkeiten).

In der Integration dieser Grunderfahrungen entfaltet der Mathematikunterricht seine spezifische allgemein bildende Kraft und leistet einen unverzichtbaren Beitrag zur Erfüllung des Bildungsauftrags der gymnasialen Oberstufe; dazu gehört, eine vertiefte Allgemeinbildung mit Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden.

Neue Technologien können zur Unterstützung aller drei Grunderfahrungen wirksam eingesetzt werden. Insbesondere können Rechner durch dynamische Visualisierungen den Aufbau von Grundvorstellungen mathematischer Begriffe unterstützen, als leistungsfähiges Werkzeug bei Modellbildungen und Simulationen verwendet werden und heuristisch-experimentelles Arbeiten fördern.

Den folgenden drei Sachgebieten kommt unverändert zentrale Bedeutung zu:

- **Analysis** als Grundlage fundamentaler mathematischer Begriffe und Verfahren zur Beschreibung von Abhängigkeiten und Veränderungsprozessen,
- **Lineare Algebra/Analytische Geometrie** mit ihren Methoden zur Algebraisierung von Objekten und zur analytischen Beschreibung des Raumes,
- **Stochastik** mit der Möglichkeit zur quantitativen Beschreibung von Vorgängen, die vom Zufall abhängen, und zur Beurteilung ihrer Ergebnisse.

Das Anwenden mathematischer Begriffe und Methoden auf inner- und außermathematische Problemstellungen erfordert neben einem soliden Basiswissen Sicherheit im Erkennen und Nutzen der Vernetzung mathematischer Inhalte und Verfahren sowie die Kompetenz zu selbstständigem Erschließen und Bearbeiten. Das Verstehen zentraler Begriffe und Problemlöse-Verfahren tritt gleichberechtigt neben den sicheren Umgang mit Symbolen und Kalkülen.

Die Prüfungsaufgaben im Abitur erfordern einen Unterricht, der in den drei Sachgebieten den Aufbau adäquater Grundvorstellungen der zentralen Begriffe und Methoden als Schwerpunkt hat und sich dabei an fundamentalen Ideen orientiert.

Die in der Abiturprüfung zu fordernden Kompetenzen basieren auf einem Mathematikunterricht, der den dargestellten fachlichen und methodischen Anforderungen genügt. Das bedeutet insbesondere, dass neben der Beherrschung von Begriffen und Verfahren auch das Verständnis dafür, wie man zu zentralen Aussagen gelangt, an Bedeutung gewinnt. In gleicher Weise kommt es auch auf das Beschreiben und Begründen von Problemlösungen an. Um diese Kompetenzen im erforderlichen Umfang und nachhaltig si cher zu stellen, müssen die Aufgabenstellungen in der Prüfung auch vernetzte Problemfelder ansprechen und Möglichkeiten bieten, Zusammenhänge zu entdecken und vielfältige Lösungswege zu gehen, kurz, sie müssen offener werden.

Die spezifischen fachlichen und methodischen Kompetenzen, die im Mathematikunterricht vermittelt werden und für die Abiturprüfung zur Verfügung stehen müssen, sind im Einzelnen in Abschnitt 1.1 beschrieben.

Zur Sicherung eines einheitlichen und angemessenen Anforderungsniveaus in den Prüfungsaufgaben enthalten die Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Fach Mathematik

- eine Beschreibung der Prüfungsgegenstände, d.h. der nachzuweisenden Kompetenzen sowie der fachlichen Inhalte, an denen diese Kompetenzen eingefordert werden sollen,
- Kriterien, mit deren Hilfe überprüft werden kann, ob eine Prüfungsaufgabe das anzustrebende Anspruchsniveau erreicht,
- Hinweise und Aufgabenbeispiele für die Gestaltung der schriftlichen und mündlichen Prüfung sowie zu alternativen Prüfungsformen.

Die im Folgenden aufgeführten nachzuweisenden fachlichen Kompetenzen gelten sowohl für die Prüfungen im Grundkurs- als auch im Leistungskursfach.

Als Hilfsmittel für die Konstruktion von Prüfungsaufgaben sowie für die Gestaltung der mündlichen Prüfung und alternativer Prüfungsformen dient die Beschreibung von drei Anforderungsbereichen. Mit ihrer Hilfe und nach Maßgabe des vorangegangenen Unterrichts, dem die Lehrpläne der Länder zugrunde liegen, werden Prüfungsinhalte ausgewählt und Prüfungsaufgaben erstellt.

I Festlegungen für die Gestaltung der Abiturprüfung

1 Fachliche Inhalte und Qualifikationen

1.1 Fachliche und methodische Kompetenzen

Die Anforderungen für die schriftliche und mündliche Prüfung sowie für alternative Prüfungskomponenten sind so zu gestalten, dass ein möglichst breites Spektrum von Kompetenzen an geeigneten Inhalten überprüft werden kann. Dazu gehören im Wesentlichen:

- angemessenes Verwenden mathematischer Fachsprache
- Veranschaulichen und Beschreiben mathematischer Sachverhalte mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- sachgerechtes, flexibles und kritisches Umgehen mit grundlegenden Begriffen, Sätzen, Verfahren und Algorithmen, auch zur Lösung innermathematischer Probleme
- mathematisches Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme
  - Beschreiben der Ausgangssituation und der Modellannahme
  - Mathematisieren
  - Lösen in dem gewählten Modell
  - Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext
  - kritisches Reflektieren der Ergebnisse und der Vorgehensweise
- Beherrschen grundlegender Vorgehensweisen zur Gewinnung, Darstellung und Sicherung mathematischer Erkenntnisse, insbesondere
  - Konkretisieren mathematischer Aussagen an Beispielen
  - Nutzen heuristischer Strategien und Verfahren
  - Argumentieren und Begründen bei mathematischen Sachverhalten
  - Erläutern von Regeln und Verfahren

  - Beweisen von mathematischen Sätzen unter Verwendung der jeweils geeigneten Beweisverfahren
  - lokales Ordnen mathematischer Sätze, Erkennen von Analogien, Verallgemeinern, Spezialisieren
- Verfügen über eine sichere Raumanschauung
- Verknüpfen von Inhalten aus verschiedenen mathematischen Themenbereichen
- selbständiges Auswählen, Nutzen und Bewerten von Informationen
  - Erschließen von Informationsquellen
  - heuristisches und systematisches Bearbeiten von Problemen
  - sorgfältiges Dokumentieren der Arbeitsschritte
  - verständliches und übersichtliches Präsentieren der Ergebnisse
  - kritisches Reflektieren des eigenen Handelns
- sachangemessenes Nutzen von Hilfsmitteln wie zum Beispiel Tafelwerke, Taschenrechner, Computersoftware, Internet

1.2 Fachliche Inhalte

Beim Nachweis der fachlichen Kompetenzen kommt den fachlichen Inhalten aus den Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik besondere Bedeutung zu. Alle drei Sachgebiete müssen für die Abiturprüfung zur Verfügung stehen.

Im Folgenden werden die verbindlichen fachlichen Inhalte aus diesen Sachgebieten aufgeführt. Um die verbindlichen Anforderungen an das Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten deutlich zu machen, werden die Inhalte ausgewählten mathematischen LEITIDEEN beispielhaft zugeordnet.

Soweit in den folgenden Auflistungen bei grundlegenden Inhalten unterschiedliche Abstraktionsebenen im Grundkurs- und Leistungskursfach ausdrücklich benannt sind, gelten diese auch für darauf aufbauende Themenbereiche.

Im Unterschied zum Grundkursfach müssen sich Prüfungsaufgaben im Leistungskursfach grundsätzlich durch komplexere Sachverhalte und offenere Fragestellungen auszeichnen (siehe 1.4).

Im Sachgebiet Lineare Algebra/Analytische Geometrie können die Anforderungen, aufbauend auf dem Vektorbegriff, drei alternativen Inhaltssträngen folgen: vektorielle analytische Geometrie (A1), Anwendung von Matrizen bei Abbildungen (A2) und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen (A3).

1.2.1 Leitidee Funktionaler Zusammenhang

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Funktionsbegriff</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verknüpfung und Verkettung von Funktionen</td></tr>
<tr><td>an konkreten Beispielen</td><td>allgemein</td></tr>
<tr><td colspan="2">Umkehren von Funktionen in konkreten Fällen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ableitung von Funktionen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Deutung der Ableitung
als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ableitungsregeln</td></tr>
<tr><td colspan="2">Untersuchung von Funktionen an besonderen Stellen, auch qualitativ</td></tr>
<tr><td></td><td>Kurvenscharen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Integration von Funktionen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Deutung des Integrals
als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</td></tr>
<tr><td>Grundverständnis</td><td>Formulierung und Beweis</td></tr>
<tr><td colspan="2">einfache Integrationsregeln</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grundkompetenzen im Umgang mit den Funktionen:
$x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbf{Z}$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \sin x$
und ihren einfachen Verknüpfungen und Verkettungen</td></tr>
<tr><td></td><td>vertiefte Behandlung von
mindestens zwei Funktionsklassen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zufallsgrößen</td></tr>
</table>

1.2.2 Leitidee Grenzprozesse / Approximation

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Grenzwertbegriff</td></tr>
<tr><td>nur propädeutisch</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Grenzwerte bei Funktionen</td></tr>
<tr><td></td><td>Asymptotisches Verhalten von Funktionen</td></tr>
<tr><td colspan="2">näherungsweise Berechnung von Nullstellen</td></tr>
<tr><td></td><td>und von Integralen</td></tr>
</table>

1.2.3 Leitidee Modellieren

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Untersuchung realitätsnaher Probleme mit Hilfe von Funktionen
Extremalprobleme</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wachstumsprozesse</td></tr>
<tr><td colspan="2">Anpassung von Funktionen an vorgegebene Bedingungen</td></tr>
<tr><td></td><td>Zusammenhang zwischen diskreten und stetigen Modellierungen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen (Alternative A3)</td></tr>
<tr><td></td><td>auch Fixpunktproblem</td></tr>
<tr><td colspan="2">ein Verfahren der beurteilenden Statistik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simulation von Zufallsexperimenten</td></tr>
</table>

1.2.4 Leitidee Messen

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Bestimmung von Flächeninhalten</td></tr>
<tr><td>nur begrenzte Flächen</td><td>auch unbegrenzte Flächen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bestimmung von Winkeln und Abständen mit Hilfe des Skalarprodukts
(Alternative A1)</td></tr>
<tr><td>keine windschiefen Geraden</td><td>einschließlich windschiefer Geraden</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zufallsgrößen</td></tr>
<tr><td>Erwartungswert und Standardabweichung von binomialverteilten Zufallsgrößen</td><td>Kenngrößen von Zufallsgrößen</td></tr>
</table>

1.2.5 Leitidee Algorithmus

<table>
<tr><th>Grundkursfach</th><th>Leistungskursfach</th></tr>
<tr><td colspan="2">Rekursion / Iteration</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lösen linearer Gleichungssysteme</td></tr>
<tr><td></td><td>auch Fragen der Lösbarkeit</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rechnen mit Matrizen (Alternativen A2 und A3)</td></tr>
</table>

1.2.6 Leitidee Räumliches Strukturieren / Koordinatisieren

Grundkursfach	Leistungskursfach
Festlegung eines geeigneten Koordinatensystems	
Vektoren im Anschauungsraum	
Darstellung geometrischer Objekte in einem Schrägbild (Alternative A1)	
Koordinatendarstellung von Vektoren	
Linearkombination, lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	
geometrische Deutung steht im Vordergrund	
Beschreibung und Untersuchung von geometrischen Objekten mit Hilfe von Vektoren	
Anwendung von Matrizen bei Abbildungen (Alternative A2)	

1.2.7 Leitidee Zufall

Grundkursfach	Leistungskursfach
Wahrscheinlichkeit	
Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	
	Unabhängigkeit von Ereignissen, bedingte Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeitsverteilung Binomialverteilung	
	auch stetige Verteilung

1.3 Mögliche zusätzliche Themenbereiche

In der Abiturprüfung können die vorstehend genannten verbindlichen Inhalte ergänzt und vertieft werden, u. a. durch spezielle Aspekte im Bereich

- einfache Differentialgleichungen im Zusammenhang mit Anwendungen
- numerische Näherungsmethoden
- Kurven und gekrümmte Flächen im Raum
- Funktionen mit mehreren Veränderlichen
- Untersuchung dynamischer Vorgänge
- Markov-Ketten
- Testverfahren

1.4 *Differenzierung zwischen Grundkurs- und Leistungskursfach*

1.4.1 *Anforderungen*

Die Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 16.06.2000) weist Grund- und Leistungskursen unterschiedlich akzentuierte Aufgaben zu: den Grundkursen die Vermittlung einer wissenschaftspropädeutisch orientierten Grundbildung, den Leistungskursen die systematische, vertiefte und reflektierte wissenschaftspropädeutische Arbeit.

Grundkurse im Fach Mathematik führen in grundlegende Sachverhalte, Probleme und Zusammenhänge ein, verdeutlichen die Differenz zwischen Alltagswissen und wissenschaftlich begründetem Wissen. Sie zielen mit Bezug auf Anwendungen auf die Beherrschung wesentlicher Arbeitsmethoden und die exemplarische Erkenntnis fachübergreifender Zusammenhänge.

Leistungskurse im Fach Mathematik befassen sich methodisch ausgewiesener und systematischer mit wesentlichen, die Breite, die Komplexität und den Aspektreichtum des Faches verdeutlichenden Inhalten, Theorien und Modellen. Sie sind gerichtet auf vertiefte Beherrschung der fachlichen Methoden, ihre selbstständige Anwendung, Übertragung und theoretische Reflexion.

Die Anforderungen im Grundkursfach sollen sich daher nicht nur quantitativ sondern vor allem auch qualitativ von denen im Leistungskursfach unterscheiden. Grundkurs- und Leistungskursfach unterscheiden sich insbesondere durch:

- den Grad der Vorstrukturierung,
- den Schwierigkeitsgrad,
- den Komplexitätsgrad,
- die Offenheit der Aufgabenstellung,
- die Anforderungen an Selbstständigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben,
- den Umfang und die Art der bereitgestellten Hilfsmittel und Informationen.

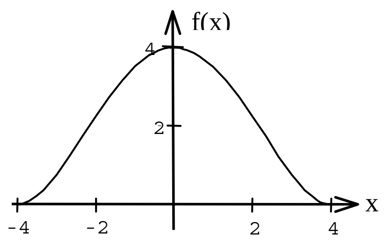
Im Folgenden werden an Beispielen von Teilaufgaben für mündliche und schriftliche Prüfungen die Unterschiede verdeutlicht.

1.4.2 *Aufgabenbeispiele für die Differenzierung*

Beispiel 1 Renaissancegiebel

Der symmetrische Giebel eines Renaissancehauses soll rekonstruiert werden.

Grundkursfach-Niveau



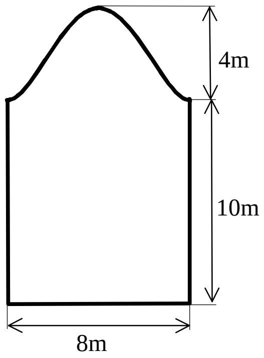
Der obere Giebelrand ist in der Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt.

Eine gerade, ganzrationale Funktion f beschreibt im entsprechenden Intervall den oberen Giebelrand. Die x-Achse ist Tangente an den Graph der Funktion f in den Punkten $P_1(-4|0)$ und $P_2(4|0)$. Die maximale Höhe des Giebels über der Dachkante beträgt 4,0 m (siehe Abbildung).

Begründen Sie, dass die Funktion f eine Funktion mindestens 4. Grades sein muss.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

Leistungskursfach-Niveau



Beschreiben Sie die Form des oberen Giebelrandes mathematisch (die angegebene Abbildung ist nicht maßstäblich).

Begründen Sie Ihren Ansatz.

Beispiel 2 Ebenenschar

Grundkursfach-Niveau

Gegeben ist im Raum die Ebene E: $x_1 + x_2 = 0$.

Stellen Sie E in Parameterform dar.

Zeigen Sie: E enthält die x_3-Achse.

Beweisen Sie: E wird von jeder zur x_2-Achse parallelen Geraden geschnitten.

Leistungskursfach-Niveau

Gegeben ist die Ebenenschar E_t: $x_1 + t \cdot x_2 = 0$.

Stellen Sie E_t in Parameterform dar.

Zeigen Sie: E_t enthält die x_3-Achse für alle $t \in$ R.

Beweisen Sie: Für $t \neq 0$ wird jede Ebene der Schar von jeder zur x_2-Achse parallelen Geraden geschnitten.

Erläutern Sie die Lage von E_0.

Beispiel 3 Oblivimie

In der Bevölkerung sind 2 % „O-Personen". Das sind Personen, die den Erreger der noch nicht ausgebrochenen Krankheit „Oblivimie" im Blut haben.
Bei einem Schnelltest werden 94 % der O-Personen als solche erkannt, aber der Test stuft auch 8 % der Nicht-O-Personen fälschlicherweise als O-Personen ein.

Grundkursfach-Niveau

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erklärt der Test eine ausgesuchte Person als O-Person bzw. als Nicht-O-Person? Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Leistungskursfach-Niveau

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine positiv getestete Person tatsächlich eine O-Person? Erläutern Sie Ihr Vorgehen und bewerten Sie das Ergebnis.

Beispiel 4 Ableitung

Betrachten Sie folgende Daten:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
f(x)	3,7	3,5	3,5	3,9	4,0	3,9

Grundkursfach-Niveau

Die angegebenen Daten gehören zu einer differenzierbaren Funktion.

Bestimmen Sie einen Schätzwert für $f'(0{,}6)$.

Leistungskursfach-Niveau

Bestimmen Sie verschiedene Schätzwerte für $f'(0{,}6)$ und erläutern Sie die jeweils nötigen Annahmen.

Vergleichen und bewerten Sie die von Ihnen gewählten Verfahren.

Welchem Verfahren geben Sie den Vorzug? Beschreiben Sie dieses Verfahren allgemein mit Hilfe eines Terms.

2 Anforderungsbereiche

2.1 Allgemeine Hinweise

Die Abiturprüfung soll das Leistungsvermögen der Prüflinge möglichst differenziert erfassen. Dazu werden im Folgenden drei Anforderungsbereiche unterschieden.

Obwohl sich weder die Anforderungsbereiche scharf gegeneinander abgrenzen noch die zur Lösung einer Prüfungsaufgabe erforderlichen Teilleistungen in jedem Einzelfall eindeutig einem bestimmten Anforderungsbereich zuordnen lassen, kann die Berücksichtigung der Anforderungsbereiche wesentlich dazu beitragen, Einseitigkeiten zu vermeiden und die Durchschaubarkeit und Vergleichbarkeit der Prüfungsaufgaben sowie der Bewertung der Prüfungsleistungen zu erhöhen.

Beim Entwurf einer Prüfungsaufgabe wird jede von den Prüflingen erwartete Teilleistung mindestens einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet. Dabei müssen die Sachgebiete nicht generell getrennt angesprochen werden. Vielmehr wird empfohlen, durch eine geeignete Vernetzung der Fragestellungen die Bedeutungs- und Beziehungshaltigkeit der Mathematik zum Ausdruck zu bringen.

Offenere Fragestellungen führen in der Regel über formales Anwenden von Begriffen und Verfahren hinaus und damit zu einer Zuordnung zu den Anforderungsbereichen II oder III. Die tatsächliche Zuordnung der Teilleistungen hängt davon ab, ob die jeweils aufgeworfene Problematik eine selbstständige Auswahl unter Bearbeitungsansätzen in einem durch Übung bekannten Zusammenhang erfordert oder ob kreatives Erarbeiten, Anwenden und Bewerten in komplexeren und neuartigen Zusammenhängen erwartet wird.

In jedem Fall ist die Zuordnung zu den Anforderungsbereichen abhängig vom vorangegangenen Unterricht bzw. von im Lehrplan verbindlich vorgeschriebenen Zielen und Inhalten sowie von der Leistungsfähigkeit zugelassener Hilfsmittel (z.B. GTR, CAS, Internet).

In den die einzelnen Anforderungsbereiche erläuternden Beispielen werden diese Abhängigkeiten verdeutlicht.

2.2 Fachspezifische Beschreibung der Anforderungsbereiche

2.2.1 Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst

- die Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Ver

fahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang

Dazu kann u. a. gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

2.2.2 Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst

- selbstständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann

Dazu kann u. a. gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme

- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind
- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

2.2.3 Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst

- planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexerer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen
- bewusstes und selbstständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen

Dazu kann u. a. gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Schriftliche Prüfung

3.1 Allgemeine Hinweise

Eine Prüfungsaufgabe für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei bis fünf Aufgaben. Die Prüfungsaufgabe enthält mindestens zwei der in Abschnitt 1.2 genannten Sachgebiete und darf sich nicht auf die Inhalte nur eines Kurshalbjahres beschränken (vgl. Vereinbarung über die Abiturprüfung der gymnasialen O berstufe in der Sekundarstufe II (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 13.12.1973 i.d.F. vom 16.06.2000), § 5 Abs. 4). Dabei müssen sich die Anforderungen zu mindestens einem Drittel auf Analysis beziehen. Sofern andere als die unter 1.2 genannten Sachgebiete oder zusätzliche Themenbereiche (vgl. 1.3) berücksichtigt werden, dürfen sich die Anforderungen höchstens zu einem Drittel auf diese Sachgebiete bzw. Themenbereiche beziehen. Das zugehörige Anforderungsniveau muss dem der anderen Aufgaben entsprechen.

Jede Aufgabe kann in Teilaufgaben gegliedert sein, die jedoch nicht beziehungslos nebeneinander stehen sollen. Durch die Gliederung in Teilaufgaben können

- verschiedene Blickrichtungen eröffnet,
- mögliche Vernetzungen gefördert,
- Differenzierungen zwischen Grundkurs- und Leistungskursfach erreicht,
- unterschiedliche Anforderungsbereiche gezielt angesprochen werden.

Die Teilaufgaben einer Aufgabe sollen so unabhängig voneinander sein, dass eine Fehlleistung - insbesondere am Anfang - nicht die weitere Bearbeitung der Aufgabe unmöglich macht. Falls erforderlich, können Zwischenergebnisse in der Aufgabenstellung enthalten sein.

Die Aufgliederung darf nicht so detailliert sein, dass dadurch ein Lösungsweg zwingend vorgezeichnet wird.

Ein ausgewogenes Verhältnis zwischen formalen und anwendungsbezogenen (innermathematischen oder realitätsnahen) Prüfungsanforderungen ist zu gewährleisten.

3.2 Aufgabenarten

Folgende Arten von Aufgaben oder Teilaufgaben können u. a. vorkommen, wobei teilweise Überschneidungen möglich sind:

- Aufgaben, in denen die Ermittlung eines konkreten Einzelergebnisses gefordert wird
- Darstellung, Erläuterung und sachgerechte Anwendung von mathematischen Begriffen und Verfahren
- Untersuchung vorgegebener mathematischer Objekte auf ihre Eigenschaften
- Visualisierung von Sachverhalten und mathematischen Zusammenhängen
- Konstruktionen (z.B. Anpassung von Funktionen, geometrische Objekte)
- Problemstellungen, die eine sachgerechte Verwendung von Hilfsmitteln erfordern
- Auswertung von Informationen
- Herleitungen, Begründungen und Beweise
- Modellierung von Sachverhalten
- Interpretation, Vergleich und Bewertung von Daten, Ergebnissen, Lösungswegen oder Verfahren
- Übertragung der Ergebnisse einer Untersuchung auf einen anderen Sachverhalt im Sinne der Vernetzung verschiedener Teilgebiete

Unterscheidungsmerkmale für die Aufgabenstellung in Grundkurs- und Leistungskursfach sind unter 1.4 benannt.

3.3 Hinweise zum Erstellen einer Prüfungsaufgabe

Die Prüfungsaufgabe für die schriftliche Abiturprüfung soll sowohl fachliche und methodische Kompetenzen als auch Kenntnisse fachlicher Inhalte in möglichst großer

Breite überprüfen.

Eine Prüfungsaufgabe muss sich auf alle drei in Abschnitt 2.2 beschriebenen Anforderungsbereiche erstrecken, so dass eine Beurteilung ermöglicht wird, die das gesamte Notenspektrum umfasst. Die Prüfungsaufgabe sowohl für das Grundkursfach als auch für das Leistungskursfach erreicht dann ein angemessenes Niveau, wenn das Schwergewicht der zu erbringenden Prüfungsleistungen im Anforderungsbereich II liegt und daneben die Anforderungsbereiche I und III berücksichtigt werden, und zwar Anforderungsbereich I in höherem Maße als Anforderungsbereich III.

Entsprechende Anteile der Anforderungsbereiche können insbesondere durch geeignete Wahl der nachzuweisenden fachlichen und methodischen Kompetenzen, durch die Struktur der Prüfungsaufgabe sowie durch entsprechende Formulierung des Textes erreicht werden (vgl. 2.1). Diese Wahl sollte so erfolgen, dass eine prüfungsdidaktisch sinnvolle, selbstständige Leistung gefordert wird, ohne dass der Zusammenhang zur bisherigen Unterrichts- und Klausurpraxis verloren geht.

Das Erstellen einer Prüfungsaufgabe einschließlich des Abschätzens ihrer Angemessenheit lässt sich in folgender Weise vornehmen:

- Nach Auswahl der Problemfelder und der darin möglichen Fragestellungen werden die Aufgaben bzw. Teilaufgaben unter Berücksichtigung der in 3.1 beschriebenen Bedingungen formuliert.
- Zu jeder Teilaufgabe werden in Stichworten die erwarteten Lösungsschritte einschließlich möglicher Alternativen beschrieben (siehe 3.4 und Teil II, 1).
- Aufgrund des vorangegangenen im Rahmen der geltenden Bestimmungen erteilten Unterrichts werden die erwarteten Lösungsschritte nach pädagogischem Ermessen den Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet.
- Zum Abschätzen des Anteils der einzelnen Anforderungsbereiche ist zu beachten, dass die erwarteten Lösungsschritte jeweils Teilleistungen darstellen, die im Rahmen der gesamten Prüfungsaufgabe von unterschiedlicher Bedeutung sein können. Deshalb kann es hilfreich sein, den Anteil dieser einzelnen zu erbringenden Teilleistungen an der erwarteten Gesamtleistung zu kennzeichnen. Diese Kennzeichnung berücksichtigt vorwiegend die zur Lösung erforderlichen gedanklichen Einzelschritte und die für die Bearbeitung und Darstellung geschätzte Zeit; sie beruht vornehmlich auf der pädagogischen Erfahrung.

3.4 Beschreibung der erwarteten Prüfungsleistungen (Erwartungshorizont)

„Den Aufgaben der schriftlichen Prüfung werden von der Aufgabenstellerin bzw. dem Aufgabensteller eine Beschreibung der von den Schülerinnen und Schülern erwarteten Leistungen einschließlich der Angabe von Bewertungskriterien beigegeben. Dabei sind von der Schulaufsichtsbehörde gegebene Hinweise für die Bewertung zu beachten und auf die gestellten Aufgaben anzuwenden." (§ 5 Absatz 3 der „Vereinbarung über die Abiturprüfung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II" (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 13.12.1973 i.d.F. vom 16.06.2000))

Die erwarteten Prüfungsleistungen sind stichwortartig darzustellen. Werden Prüfungsaufgaben nicht zentral gestellt, so ist der vorangegangene Unterricht, aus dem die vorgeschlagene Prüfungsaufgabe erwachsen ist, so weit kurz zu erläutern, wie dies zum Verständnis der Aufgabe notwendig ist. Damit soll zugleich der Bezug zu den Anforderungsbereichen einsichtig gemacht werden.

Zugelassene Hilfsmittel sind anzugeben. Beim Einsatz der Hilfsmittel muss der Grundsatz der Gleichbehandlung gewahrt bleiben.

3.5 Bewertung von Prüfungsleistungen

Nach § 6 Absatz 5 der „Vereinbarung über die Abiturprüfung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II“ (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 13.12.1973 i.d.F. vom 16.06.2000) soll aus der Korrektur und Beurteilung der schriftlichen Arbeit (Gutachten) hervorgehen, „welcher Wert den von der Schülerin bzw. dem Schüler vorgebrachten Lösungen, Untersuchungsergebnissen oder Argumenten beigemessen wird und wieweit die Schülerin bzw. der Schüler die Lösung der gestellten Aufgaben durch gelungene Beiträge gefördert oder durch sachliche oder logische Fehler beeinträchtigt hat. Die zusammenfassende Beurteilung schließt mit einer Bewertung gemäß Ziffer 9.1 und 9.2 der Vereinbarung vom 07.07.1972 i.d.F. vom 16.06.2000.“

Das Beurteilen der von den Prüflingen erbrachten Prüfungsleistung erfolgt unter Bezug auf die beschriebene erwartete Gesamtleistung. Den Beurteilenden steht dabei ein Beurteilungsspielraum zur Verfügung.

Liefern Prüflinge zu einer gestellten Aufgabe oder Teilaufgabe Lösungen, die in der Beschreibung der erwarteten Prüfungsleistungen nicht erfasst waren, so sind die erbrachten Leistungen angemessen zu berücksichtigen. Dabei kann der vorgesehene Bewertungsrahmen für die Teilaufgabe nicht überschritten werden.

Für die Bewertung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten.

Darüber hinaus sind schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit in der Muttersprache (Unterrichtssprache) oder gegen die äußere Form gemäß § 6 Abs. 5 der „Vereinbarung über die Abiturprüfung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II“ (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom l3. 12. 1973 i.d.F. vom 16.06.2000) zu bewerten.

Da jede Prüfungsaufgabe in mehrere voneinander unabhängige Aufgaben gegliedert ist, ist es notwendig, für diese Teile den jeweiligen Anteil an der erwarteten Gesamtleistung anzugeben.

Die Festlegung der Schwelle zur Note „ausreichend“ (05 Punkte) und die Vergabe der weiteren Noten sind Setzungen, die in besonderem Maße der pädagogischen Erfahrung und Verantwortung der Beurteilenden unterliegen.

Die Note „ausreichend“ (05 Punkte) soll erteilt werden, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 Prozent) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu reichen Leistungen allein im Anforderungsbereich I nicht aus. Oberhalb und unterhalb dieser Schwelle sollen die Anteile der erwarteten Gesamtleistung den einzelnen Notenstufen jeweils ungefähr linear zugeordnet werden, um zu sichern, dass mit der Bewertung die gesamte Breite der Skala ausgeschöpft werden kann.

Die Note „gut“ (11 Punkte) soll erteilt werden, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 Prozent) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist.

4 Mündliche Prüfung

4.1 Besonderheiten und Aufgabenstellung

Die mündliche Prüfung erstreckt sich auf die in Abschnitt 1 genannten Prüfungsgegenstände und bezieht sich auf mindestens zwei der in Abschnitt 1.2 genannten Sachgebiete. Dabei sollen die Prüflinge zeigen, dass sie über mathematische Sachverhalte in freiem Vortrag berichten und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen können. Sie sollen insbesondere nachweisen, in welchem Umfang sie

- einen Überblick über grundlegende Sätze, Begriffe und Verfahren der Mathematik besitzen,
- Verständnis für mathematische Denk- und Arbeitsweisen haben,
- Einblick in mathematische Problemstellungen und Ergebnisse gewonnen haben.

Um in der zur Verfügung stehenden Zeit diese Kompetenzen überprüfen zu können, muss sich die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung grundsätzlich von der für die schriftliche Prüfung unterscheiden. Im Vordergrund soll die Darstellung und Begründung von Sachverhalten und Verfahren stehen. In der Prüfung ist der Nachweis verschiedener fachlicher und methodischer Kompetenzen zu fordern. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden.

Einerseits bieten sich dazu an:

- die Nutzung geeigneter Werkzeuge zur Erarbeitung der Lösungen (z.B. Taschenrechner, Software, Fachliteratur),
- der Einsatz von Hilfsmitteln zur Präsentation der Lösungswege und Ergebnisse (z.B. Folien, Displays, Modelle).

Andererseits sind Aufgabenstellungen besonders geeignet, die

- Teilaufgaben enthalten, die sich auf eine Erläuterung des Lösungsweges beschränken, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind,
- Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgeben, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.

Aufgaben, die sich in Teilaufgaben zunehmend öffnen, bieten dem Prüfling eine besondere Chance, den Umfang seiner Fähigkeiten und die Tiefe seines mathematischen Verständnisses darzustellen. Für den Prüfungsausschuss ermöglichen sie die differenzierte Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Prüflings.

Die Prüfungsaufgabe muss einen einfachen Einstieg erlauben. Sie muss andererseits so angelegt sein, dass in der Prüfung unter Beachtung der Anforderungsbereiche (vgl. 2), die auf der Grundlage eines Erwartungshorizontes zugeordnet werden, grundsätzlich jede Note erreichbar ist.

4.2 Kriterien für die Bewertung

Bei der Bewertung der mündlichen Prüfungsleistung sollen neben den in Abschnitt 1.1 beschriebenen fachlichen und methodischen Kompetenzen vor allem folgende Kriterien berücksichtigt werden:

- Umfang und Qualität der nachgewiesenen mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten,
- sachgerechte Gliederung und folgerichtiger Aufbau der Darstellung, Beherrschung der Fachsprache, Verständlichkeit der Darlegungen, adäquater Einsatz der Präsentationsmittel und die Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen,
- Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen, mathematische Sachverhalte zu beurteilen, auf Fragen und Einwände einzugehen und gegebene Hilfen aufzugreifen,
- Kreativität und Selbstständigkeit im Prüfungsverlauf.

4.3 Fünfte Prüfungskomponente

„Die Abiturprüfung umfasst mindestens 4, höchstens 5 Komponenten. Fünfte Kompo nente ist entweder eine schriftliche oder eine mündliche Prüfung in einem weiteren Fach oder eine besondere Lernleistung.“ (Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 16.06.2000), 8.2.1) Im Rahmen der fünften Prüfungskomponente können die Länder neue Prüfungsformen entwickeln. Für alle Formen der fünften Prüfungskomponente gelten die Abschnitte 1 bis 4.2 sinngemäß.

Im Folgenden werden für die fünfte Prüfungskomponente als „mündliche Prüfung in neuer Form“ für das Fach bzw. Referenzfach Mathematik Festlegungen getroffen, die über die Bestimmungen der Abschnitte 1 bis 4.2 hinausgehen.

4.3.1 Besonderheiten

Die fünfte Prüfungskomponente als „mündliche Prüfung in neuer Form“ zielt insbesondere auf die Einbeziehung größerer fachlicher Zusammenhänge und fachübergreifender Aspekte in die Abiturprüfung. Sie sollte deshalb vor allem gekennzeichnet sein durch

- einen längeren zeitlichen Vorlauf und
- einen besonderen Stellenwert der vorbereiteten Präsentation.

Hinzu kommt die Möglichkeit, Gruppenprüfungen durchzuführen. Dabei ist durch Begrenzung der Gruppengröße, die Aufgabenstellung und die Gestaltung des Prüfungsgesprächs dafür Sorge zu tragen, dass die individuelle Leistung eindeutig erkennbar und bewertbar ist. Für Gruppenprüfungen eignen sich im Fach Mathematik insbesondere Prüfungsaufgaben, bei denen unterschiedliche Aspekte eines Problems behandelt werden.

Die Gewährung eines längeren zeitlichen Vorlaufs kann insbesondere nötig sein bei Prüfungsaufgaben mit komplexerer Fragestellung oder aufwändigerer Erschließung z. B. durch Literatur- oder Internet-Recherche, projektartige Bearbeitung, Experiment, Exkursion.

Die Präsentation wird bestimmt durch die verfügbaren technischen Möglichkeiten, z. B. Folien, Modelle, für Mathematik geeignete Software, Präsentationssoftware. Sie geht aus von einer vorzulegenden Dokumentation der Vorbereitung.

4.3.2 Bewertung

Bei der Bewertung der fünften Prüfungskomponente als „mündliche Prüfung in neuer Form“ kommen neben der nachgewiesenen Fach- und Methodenkompetenz

- der dokumentierten Vorbereitung,
- der Klarheit, Vollständigkeit und Angemessenheit von Dokumentation und Präsentation,
- der Selbstständigkeit und dem Einfallsreichtum bei der Ausführung der Arbeitsanteile und Arbeitsschritte,
- dem Grad der Durchdringung und den aufgezeigten Vernetzungen sowie
- der Souveränität im Prüfungsgespräch

besondere Bedeutung zu.

4.3.3 Beispiele für Themenbereiche

Die Themenstellung soll durch Reichhaltigkeit der innermathematischen oder fachübergreifenden Bezüge gekennzeichnet sein. Sie soll in hohem Maße Originalität und Kreativität bei der Bearbeitung ermöglichen.

Die folgenden Beispiele beschreiben Themenbereiche, aus denen Teilaspekte als Prü fungsthemen für die fünfte Prüfungskomponente als „mündliche Prüfung in neuer Form“ besonders geeignet erscheinen:

- Modellierungsprozesse
- Erhebung und Auswertung von Daten
- Dynamische Vorgänge
- Mehrstufige Prozesse
- Codierungs- und kryptologische Verfahren
- Optimierungsprobleme
- Kurven und gekrümmte Flächen
- Geometrie der Erdkugel
- Fibonacci (z. B. Folgen, Irrationalität, goldener Schnitt, Phylotaxis)
- Mathematische Logik
- Besondere Leistungen von Mathematikerinnen und Mathematikern

II Aufgabenbeispiele

Mit Rücksicht auf die unterschiedliche Praxis in den Ländern bilden die aufgeführten Beispiele für sich keine geschlossenen Prüfungsaufgaben; sie ergeben vielmehr erst durch Hinzufügen weiterer Aufgaben auch unterschiedlichen Umfangs eine vollständige Prüfungsaufgabe. Dabei muss sichergestellt werden, dass in der vollständigen Prüfungsaufgabe alle Bedingungen entsprechend den Festlegungen in Teil I, 3.3 bzw. 4.1 berücksichtigt werden.

Durch die ausgewählten Beispiele sollen weder besondere thematische Schwerpunkte gesetzt noch thematische Festlegungen getroffen werden. Vielmehr soll die Vielfalt der Möglichkeiten bei der Themenauswahl, bei der Aufgabenkonstruktion sowie bei den verwendeten Ausdrucks- und Schreibweisen verdeutlicht werden. Die Beispiele betonen neuere fachdidaktische Entwicklungen, ohne auf bewährte Aufgabenstellungen zu verzichten. Sie sind jedoch nicht repräsentativ hinsichtlich formaler und anwendungsbezogener Anteile der Prüfungsaufgabe.

Besondere Aspekte wie z.B.

- inhaltliche Reflexion und Interpretation von Begriffen und Verfahren,
- Modellierung,
- Öffnung von Fragestellungen
- Vernetzung von Sachgebieten und Themenbereichen
- Verwendung von Rechnern

werden bei den einzelnen Aufgabenbeispielen unter „Zielsetzung“ benannt.

Taschenrechner (nicht programmierbar), Tabellenwerk und Formelsammlung (ohne ausführliche Musterbeispiele) sind zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben generell zugelassen. Zusätzliche Hilfsmittel wie GTR (grafikfähige Taschenrechner ohne CAS und ohne aufgespielte Programme), CAS oder Programme werden ggf. genannt. Die Zulassung von grafikfähigen und programmierbaren Taschenrechnern als Hilfsmittel für die schriftliche Abiturprüfung ist nicht verpflichtend.

1 Aufgabenbeispiele für die schriftliche Prüfung

Die Aufgabenbeispiele enthalten Angaben über die Zielsetzung der Aufgabe, die unterrichtlichen Voraussetzungen, die zugelassenen Hilfsmittel und über die vorgesehene Bearbeitungszeit. Die Beispiele in Abschnitt 1.1 sind ausführlicher dargestellt. Sie enthalten zusätzlich die Lösungsskizzen, die Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen und die vorgesehenen Bewertungseinheiten.

Die in den Anmerkungen beschriebenen unterrichtlichen Voraussetzungen dienen dazu, die Angemessenheit der jeweiligen Aufgabenstellung zu beurteilen. Bei allen Zeitangaben handelt es sich um Richtwerte.

1.1 Ausführlich kommentierte Beispiele

1.1.1 Wachstum von Fichten *LK*

Fichten stellen in Deutschland mit über 40% der Gesamtwaldfläche die wichtigste Holzart dar. In einer Region wurden folgende Durchschnittswerte gemessen:

Alter des Baumes in Jahren	0 (Setzling)	20	40	60	80	100	120	140	160
Durchmesser in m (bei älteren Fichten gemessen in 1,30 m Höhe)	0,05	0,10	0,22	0,33	0,54	0,75	0,83	0,91	0,95

a) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten in dieser Region kann durch eine Funktion d mit $d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}04 \cdot (t-80)}}$ näherungsweise beschrieben werden.

Skizzieren Sie die gemessenen Durchschnittswerte sowie den Graphen von d in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Ermitteln Sie, in welchem Jahr die Funktion d das stärkste Dickenwachstum beschreibt und bestimmen Sie dieses maximale Dickenwachstum.

b) Nennen Sie Annahmen, die logistischem Wachstum zu Grunde liegen.

Stellen Sie die Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten auf unter der Annahme, dass logistisches Wachstum vorliegt.

Zeigen Sie, dass d diese Differentialgleichung löst.

c) Oft kennen Forstleute das Alter eines Baumes nicht. Der Umfang ist meist einfacher zu messen als der Durchmesser.

Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion d eine weitere Funktion, die das Alter einer Fichte in Abhängigkeit von ihrem Umfang näherungsweise beschreibt.

d) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten soll durch eine Funktion anderen Typs als im Aufgabenteil a) approximiert werden.

Beschreiben Sie mindestens zwei unterschiedliche Lösungsansätze in Kurzform und führen Sie einen aus.

Beurteilen Sie die Qualität Ihrer Approximation im Vergleich mit der Approximation durch die Funktion d.

ANMERKUNGEN:

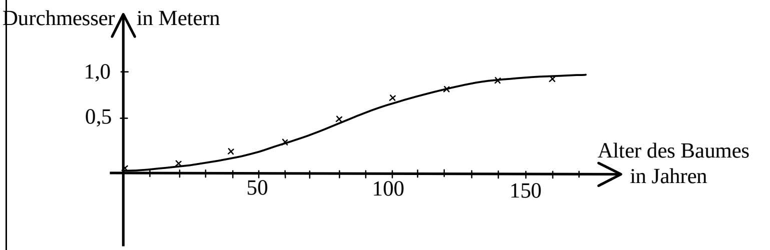
Zielsetzung:
Das Aufgabenbeispiel ist gekennzeichnet durch eine sich zunehmend öffnende Aufgabenstellung. Zu ihrer Bearbeitung ist ein GTR erforderlich, so dass Lösungen grafisch ermittelt werden können. Die volle Bandbreite der Möglichkeiten erschließt sich durch Verwendung eines CAS.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Vergleichbare Aufgaben wurden im Unterricht bearbeitet. Umkehrfunktionen waren Unterrichtsgegenstand; entsprechende Übungen wurden an anderen Beispielen durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler sind im Umgang mindestens mit einem GTR vertraut.
Steht ein CAS zur Verfügung, dann sind die folgenden Bewertungen und ggf. die vorgesehene Bearbeitungszeit entsprechend anzupassen.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR ggf. CAS

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 120 min

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	 Das stärkste Dickenwachstum entspricht dem Maximum der Ableitung			

	der Dicke-Zeit-Funktion. Mittels GTR wird grafisch das Maximum von d'(t) an der Stelle $t \approx 80$ zu 0,01 ermittelt, mittels CAS werden die Lösung von $d''(t) = 0$ zu $t = 80$ und die von $d'(80)$ zu 0,01 bestimmt. Im Alter von ca. 80 Jahren tritt das stärkste Dickenwachstum auf; es beträgt 0,01 Meter pro Jahr.	5	2	
b	Momentane Änderungsrate der Dicke ~ Bestand · (Sättigung – Bestand): $d'(t) = c \cdot d(t) \cdot [S - d(t)]$ Bestimmen der Sättigung: $S = \lim\limits_{t \to \infty} d(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{1 + e^{3,2} \cdot e^{-0,04\,t}} = 1$ Durch Einsetzen ergibt sich, dass die Differentialgleichung für $c = 0,04$ erfüllt wird.	2	7	
c	Aus $u(t) = \pi \cdot d(t) = \frac{\pi}{1 + e^{-0,04 \cdot (t-80)}}$ mit $t \geq 0$ ergibt sich durch Umstellung $t(u) = 80 - 25 \cdot \ln \frac{\pi - u}{u}$ mit $u > 0$.	5	3	
d	Beschreibungen möglicher Lösungsvarianten in Kurzform *Lösungsvariante 1:* Approximation mittels GTR. Eingabe der gegebenen Daten, grafische Darstellung der Daten. Festlegung einer Approximationsfunktion aus mehreren Möglichkeiten (ganzrationale Funktion ersten, zweiten, dritten oder vierten Grades; Logarithmus-; Exponential-; Potenzfunktion). Durchführung der Approximation; grafische Darstellung der Approximationsfunktion in der Darstellung der Daten; bei größeren Abweichungen Approximation durch einen anderen Funktionstyp. Mögliches Ergebnis: $d_2(t) = -5,03 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 + 1,14 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 1,87 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0,05$ *Lösungsvariante 2:* Approximation durch eine abschnittweise definierte Funktion. Festlegung der Anzahl der Abschnitte und ihrer Intervalle, z.B. zwei Abschnitte für die Intervalle $0 \leq t < 80$ bzw. $80 \leq t \leq 160$. Festlegung der Funktionstypen für die Abschnitte, z.B. zwei Exponentialfunktionen für das Modell des exponentiellen bzw. begrenzten Wachstums Ansatz: $d_2(t) = \begin{cases} a_1 \cdot e^{a_2 \cdot t} & \text{für } 0 \leq t < 80 \\ 1 - b_1 \cdot e^{b_2 \cdot t} & \text{für } 80 \leq t \leq 160 \end{cases}$ Festlegung von Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten für die einzelnen Abschnitte (dabei Sicherung der Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Übergangsstelle). Bestimmung der Koeffizienten, grafische Veranschaulichung. Mögliches Ergebnis: $d_2(t) = \begin{cases} 0,05 \cdot e^{0,0297 \cdot t} & \text{für } 0 \leq t < 80 \\ 1 - 2,61 \cdot e^{-0,0217 \cdot t} & \text{für } 80 \leq t \leq 160 \end{cases}$ *Lösungsvariante 3:* Approximation durch Anpassung einer Funktion mit „passendem Graphen". Auswahl einer geeigneten Funktion, z.B. Arctan-Funktion: Ansatz: $d_2(t) = a + k \cdot \arctan \frac{t-b}{c}$ Festlegung von Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten. Bestimmung der Koeffizienten, grafische Veranschaulichung. Mögliches Ergebnis: Anpassung des Wertebereichs und der Wendestelle, Verlauf des Graphen durch den Punkt (0|0,05), Anstieg des Graphen im Punkt (80|0,54), Verbesserung durch manuelle Anpassung			

	$d_2(t) = 0{,}5 + 0{,}38 \cdot \arctan \frac{t-80}{31{,}8}$ Hinweis: Wurden zusätzliche Themenbereiche behandelt, dann stehen den Schülerinnen und Schülern weitere Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung, z.B. eine Approximation durch kubische Splines oder durch ein Bezierpolynom. Beurteilung der Qualität der gewählten Approximation: Aussagen zu Abweichungen (Qualitätsmerkmal Genauigkeit); Grafische Veranschaulichung und Angabe eines Abweichungsmaßes; Vorhandensein oder Fehlen einer Modellannahme für den zu approximierenden Vorgang. Unter Umständen auch: Angabe von realitätsbezogenen Gründen für Abweichungen (wachstumsfördernde oder wachstumshemmende Einflüsse durch Pflegemaßnahmen, Wetterbedingungen, Umwelteinflüsse, Schädlingsbefall usw.); Aussagen zu Extra- und Interpolation.	6	9	5
	Insgesamt 44 BWE	18	21	5

1.1.2 Flugbahnen *LK*

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung.
Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.
Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.
Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?
Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt R(-10,2|-13,6|0) eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km.
Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte G_1(84|-3|0) und G_2(12|-99|0).
Wie weit hinter der Grenze kann ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar noch erfasst werden?

Erläutern Sie Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert eine sichere Orientierung im Anschauungsraum und ermöglicht die Überprüfung bekannter analytischer Verfahren zur Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden, Ebenen und Kugeln im Raum. Sie erfordert insbesondere eine inhaltliche Reflexion und Interpretation der Rechenergebnisse.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind geübt in der Berechnung von Abständen und Winkeln. Schnittprobleme bei Geraden und Kugeln sind behandelt. Besondere Schwierigkeiten liegen beim Übertragen realer räumlicher Sachverhalte in ein geeignetes mathematisches Modell.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 120 min

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, zwischen NO und N (Kurs 037) Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, zwischen SO und O (Kurs 127) Der Abhebepunkt liegt in P(–10,5|–14|0), das Zentrum der Stadt in Z(0|0|0), denn s = 0,5 liefert $x_3 = 6$. Abstand $\overline{PZ} = 17{,}5$ km Steigungswinkel für F_1: $\cos\varphi = 0{,}946$; $\varphi = 18{,}9°$	4	6	
b	Aus $37 = \lvert s \rvert \cdot \sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2}$ folgt entsprechend der Aufgabenstellung s = 1; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein. F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$. F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt T(10,5|14|12). T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2 , denn –7,2+4t=10,5 liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6+t_0(-3) \neq 14$. F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn $\left\lvert\begin{array}{l} -10{,}5 + 21 \cdot s = -7{,}2 + 4 \cdot t \\ -14 + 28 \cdot s \;\; = -9{,}6 - 3 \cdot t \end{array}\right\rvert$ Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte H_1(–7,2|–9,6|1,9) , bzw. H_2(–7,2|–9,6|12) . die Flugzeuge befinden sich somit 10,1 km übereinander. $\overline{H_1H_2}$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overrightarrow{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht.	4	10	
c	Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km: $\left\lvert\begin{array}{l} (x_1 + 10{,}2)^2 + (x_2 + 13{,}6)^2 + {x_3}^2 = 85^2 \\ x_1 = -7{,}2 + 4t \\ x_2 = -9{,}6 - 3t \\ x_3 = 12 \end{array}\right\rvert$ Lösung: $t = \pm 16{,}8$ F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1(-7{,}2 - 16{,}8 \cdot 4 \mid -9{,}6 - 16{,}8 \cdot (-3) \mid 12)$ und $S_2(-7{,}2 + 16{,}8 \cdot 4 \mid -9{,}6 + 16{,}8 \cdot (-3) \mid 12)$ im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke beträgt 168 km.	7	6	

d	Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 84 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix}$ Abstand der Geraden G_1G_2 von R: $d = \sqrt{(\vec{p} - \vec{v})^2 - \left((\vec{p} - \vec{v}) \cdot \overrightarrow{u_0}\right)^2} = 69$ Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden. Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht, die bei einer Entfernung von 85 km bereits zu mehr als 500 m Höhendifferenz führt (evtl. Rechnung z.B. über Satz des Pythagoras oder trigonometrisch oder analytisch). Damit wird ein landendes Flugzeug nicht mehr vom Radar erfasst.	2	4	4
	Insgesamt 47 BWE	17	26	4

1.1.3 Würfelschnitte — *LK*

Die Punkte O(0|0|0), A(4|0|0), B(0|4|0), C(0|0|4) und F(4|4|4) sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.

b) Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar E_a: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?

c) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a , die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

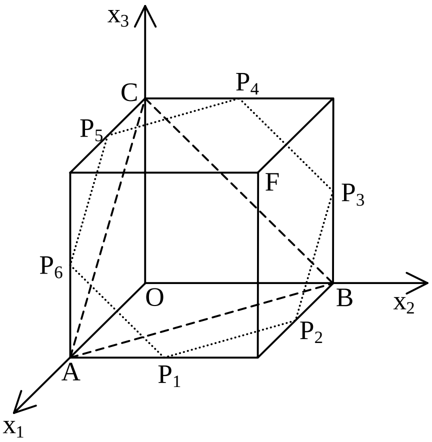
ANMERKUNGEN

Zielsetzung:
Die Aufgabenstellung ist offen hinsichtlich der möglichen Lösungswege. Sie kann in traditioneller Weise formal rechnerisch bearbeitet werden, empfiehlt sich aber eher für eine Lösung durch Überlegung und Hineindenken in die vorgegebene Situation.
Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, räumlich zu strukturieren. Diese wird eingefordert bei der Darstellung des Würfels und der Sechseck-Schnittfigur in einem Schrägbild. Die systematische Untersuchung der verschiedenen Fälle kann dann bei gutem Vorstellungsvermögen und Verständnis für die allgemeine Form einer Ebenengleichung durch Betrachtung der Sonderfälle mit geringem Rechenaufwand gelöst werden.
Die formal rechnerische Bestimmung der Schnittpunkte von Ebene und Würfelkanten ist zwar jeweils einfach, wird aber durch die Betrachtung aller Würfelkanten aufwändig und erfordert eine sorgfältige Auflistung und Unterscheidung der Teilergebnisse.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Behandelt wurden Ebenengleichungen sowie die Berechnung von Streckenlängen. Die Schülerinnen und Schüler sind es gewohnt, Körper und Schnittebenen räumlich darzustellen sowie Ebenenscharen zu untersuchen.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 min



Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

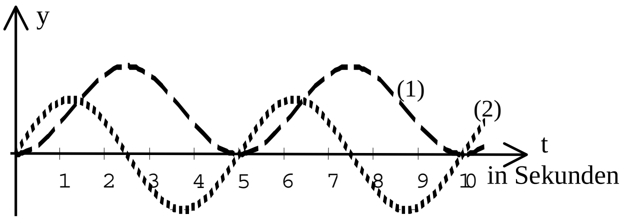
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	Schrägbild des Würfels und des Sechsecks Umfangvergleich: Schnittpunkte der Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ mit den Würfelkanten: $x_1 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_2 = 2$; $P_1(4\|2\|0)$ $x_2 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_1 = 2$; $P_2(2\|4\|0)$ analog: $P_3(0\|4\|2)$; $P_4(0\|2\|4)$; $P_5(2\|0\|4)$; $P_6(4\|0\|2)$. Die Ecken des Sechseckes sind Mitten von Würfelkanten. Es handelt sich um ein regelmäßiges Sechseck mit den Seitenlängen $a = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_6P_1} = 2\sqrt{2}$. Der Umfang des Sechsecks ist $u_1 = 12\sqrt{2}$. Das Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 4\sqrt{2}$. Der Umfang des Dreiecks beträgt $u_2 = 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Die beiden Umfänge stimmen überein.	8	11	
b	Schnittfiguren der Ebene E_a: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ mit dem Würfel: Das Sechseck und das Dreieck aus a) sind Sonderfälle. Grenzsituationen erhält man für $O \in E_a$, also $a = 0$, bzw. für $F \in E_a$, also $a = 4 + 4 + 4 = 12$. Für $0 \le a \le 12$ schneidet E_a den Würfel. Für $0 < a < 12$ erhält man eine Schnittfigur. Für $0 < a \le 4$ oder $8 \le a < 12$ ist diese Schnittfigur ein Dreieck. Für a = 4 erhält man das Dreieck ABC als Schnittfigur; a = 8 liefert ein Dreieck mit den Eckpunkten $(4\|4\|0)$, $(0\|4\|4)$, $(4\|0\|4)$. Für $4 < a < 8$ ist die Schnittfigur ein Sechseck.	4	10	
c	Man erhält eine der möglichen Lösungen, indem man z.B. die Ebene, die das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ enthält, um die Gerade P_1P_2 so dreht, dass die Punkte P_5 und P_4 in den Punkt C oder einen anderen Punkt der Strecke $\overline{OC}$ (ungleich dem Punkt O) übergehen.			4
	Insgesamt : 37 BWE	12	21	4

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi\ t)$ modelliert werden. (f(t) in Litern pro Sekunde; Zeit t in Sekunden).
Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit t = 0 keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$?

Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi}\cdot[1-\cos(\frac{2\pi}{5}t)]$ gilt.

b) Das nebenstehende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.



Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Lösung der Aufgabe erfordert die Interpretation der Begriffe „Ableitung“ und „Integral“ unter den Aspekten „Änderungsrate“ und „Gesamtänderung“ im Kontext einer realitätsnahen Situation.
Während in Teilaufgabe b) der Integralbegriff zur Beschreibung der Gesamtänderung (Wirkung) dient, muss er in c) als Mittelwert verstanden und angewendet werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schüler und Schülerinnen sind es gewohnt, die Begriff „Ableitung“ und „Integral“ in realitätsnahen Situationen unter unterschiedlichen Aspekten anzuwenden. Sie sind sicher in der Handhabung des GTR und setzen ihn für numerische Berechnungen ein.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 min

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	Die Integralfunktion F beschreibt zu jedem Zeitpunkt das Luftvolumen in der Lunge. Wegen F(0) =0 ist zur Zeit t=0 keine Luft in der Lunge. Weiter ist F´(t) = f(t) .	2	2	2

b	Beim Einatmen (Ausatmen) treten positive (negative) Änderungsraten des Luftflusses auf. Dabei nimmt das Luftvolumen in der Lunge zu (ab). Wegen dieses Zusammenhangs kann nur die Kurve (1) das Schaubild der Volumenfunktion sein. Aufgrund des periodischen Verhaltens von f (Periodenlänge 5) genügt es, das Zeitintervall [0 ; 5] (einen vollständigen Atemzug) zu betrachten. Da f an der Stelle t = 2,5 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, ist 2,5 eine Maximalstelle der Volumenfunktion. $\int_0^{2,5} f(t)\,dt = \frac{5}{2\pi} \approx 0{,}8$; d.h. das Maximum beträgt ca. 0,8 Liter. Wegen der Punktsymmetrie des betrachteten Kurvenstücks zum Punkt $P(2{,}5\,\vert\,0)$ gilt $\int_0^{2,5} f(t)\,dt = -\int_{2,5}^{5} f(t)\,dt$; d.h. bei einem Atemzug wird genau soviel Luft ausgeatmet, wie zuvor eingeatmet wurde. Da nach der Modellannahme zum Beginn eines Atemzugs (t = 0) keine Luft in der Lunge ist, wird das Minimum von null Litern am Ende des Ausatmens (t = 5) erneut erreicht. Das zum Zeitintervall [0 ; 2,5] gehörende Kurvenstück der Funktion f ist symmetrisch zur Geraden x = 1,25. In diesem Modell ist die Lunge also jeweils 1,25 Sekunden nach Beginn des Einatmens halb gefüllt. Das zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Stück des Schaubilds von f ist symmetrisch zum Punkt $P(2{,}5\,\vert\,0)$. Die Lunge ist also auch jeweils 1,25 Sekunden vor dem Ende des Ausatmens halb gefüllt. Die Lunge ist also nach jeweils 2,5 Sekunden wieder halb voll.	7	8	
c	Zeitintervall [0 ; 2,5] : $\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2,5} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}3$ Der zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Teil des Schaubilds von f ist symmetrisch zum Punkt $P(2{,}5\,\vert\,0)$. Damit ergibt sich für das Zeitintervall [2,5 ; 5] eine mittlere Luftflussrate von $-\frac{1}{\pi}$. Da beide Teilintervalle gleich lang sind, hat die mittlere Luftflussrate im Zeitintervall [0 ; 5] den Wert Null. Zeitintervall [0 ; 2,5] : $\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2,5}\left(\int_0^{x} f(t)\,dt\right)dx = \frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$ Das zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Stück des Schaubilds der Volumenfunktion ist symmetrisch zur Geraden x = 2,5. Daraus folgt auch für das Zeitintervall [2,5 ; 5] ein mittleres Luftvolumen von $\frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$. Da in beiden Teilintervallen das mittlere Luftvolumen gleich groß ist, beträgt das mittlere Luftvolumen auch im Zeitintervall [0;5] : $\frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$.	6	6	4
	Insgesamt 37 BWE	15	16	6

1.1.5 Säugetiere *GK*

Die Entwicklung einer Art von Säugetieren vollzieht sich in den drei Stadien:
Neugeborene (N), Junge (J) und Fortpflanzungsfähige (F).
Folgende Tabelle beschreibt die Übergänge zwischen diesen Stadien:

von nach	N	J	F
N	0	0	c

J	a	0	0
F	0	b	0

$(0 < a \leq 1 \; ; \; 0 < b \leq 1 \; ; \; c > 0)$

a) Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen für die Übergänge zwischen den einzelnen Entwicklungsstadien.

Formulieren Sie ein mathematisches Modell zur Ermittlung der jeweiligen Entwicklungsstadien, die nach 1, 2, ..., n Generationen beobachtet werden können.

Geben Sie die inhaltliche Bedeutung der Variablen a, b und c an.

b) Die Anfangsverteilung bestehe aus 1 000 Neugeborenen, 500 Jungen und 100 Fortpflanzungsfähigen.
Bestimmen Sie die Werte von a, b und c so, dass sich die Population dieser Art nach zwei Generationen reproduziert.

c) Untersuchen Sie, ob es Werte für a, b und c gibt, bei denen sich jede Anfangsverteilung nach drei Generationen wiederholt.

d) Beurteilen Sie das von ihnen verwendete mathematische Modell.

ANMERKUNGEN:

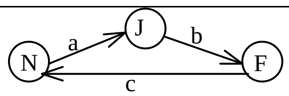
Zielsetzung:
Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert die Modellierung eines realitätsnahen Sachverhalts mit Hilfe von Übergangsgraph, Tabelle und Übergangsmatrix, inhaltliches Verständnis bei der Deutung der Variablen und die Beurteilung des verwendeten mathematischen Modells.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler kennen ein mathematisches Modell unter Verwendung von Übergangsmatrizen und Zustandsvektoren zur Modellierung analoger Aufgaben und sie beherrschen die Multiplikation von Matrizen. Zyklen im Verlauf einer Populationsdynamik spielten im Unterricht eine untergeordnete Rolle.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 60 min

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	Übergangsgraph  Beschreibung eines mathematischen Modells: Aus der Tabelle ergibt sich die Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. Der Zustandsvektor zum Zeitpunkt Null sei: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0N} \\ v_{0J} \\ v_{0F} \end{pmatrix}$. Mit der Übergangsmatrix und dem Zustandsvektor zum Zeitpunkt Null lassen sich die Zustandsvektoren nach 1, 2, ..., n Generationen ermitteln: $\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} c \cdot v_{0F} \\ a \cdot v_{0N} \\ b \cdot v_{0J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1N} \\ v_{1J} \\ v_{1F} \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 = M^2 \cdot \vec{v}_0 ; \ldots \; \vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0$			

	$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} c \cdot v_{0F} \\ a \cdot v_{0N} \\ b \cdot v_{0J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1N} \\ v_{1J} \\ v_{1F} \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 = M^2 \cdot \vec{v}_0; \ldots \ \vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0$ Inhaltliche Bedeutung der Variablen a, b und c: a: Anteil der Jungen an den Neugeborenen der vorhergehenden Generation b Anteil der Fortpflanzungsfähigen an den Jungen der vorhergehenden Generation c Anzahl der Nachkommen pro Fortpflanzungsfähigem	2	6	2
b	Reproduktion nach 2 Generationen: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500\,b\,c \\ 100\,a\,c \\ 1000\,a\,b \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 500\,b\,c \\ 100\,a\,c \\ 1000\,a\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \ a = \frac{1}{2};\, b = \frac{1}{5};\, c = 10$	2	3	
c	Reproduktion nach 3 Generationen: $\vec{v}_3 = \vec{v}_0$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} v_{0N} \\ v_{0J} \\ v_{0F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,b\,c\,v_{0N} \\ a\,b\,c\,v_{0J} \\ a\,b\,c\,v_{0F} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,v_{0N} \\ a\,b\,c\,v_{0J} \\ a\,b\,c\,v_{0F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0N} \\ v_{0J} \\ v_{0F} \end{pmatrix} \Rightarrow \ a\,b\,c = 1$	2	3	1
d	Beurteilung des mathematischen Modells Das Modell setzt die Konstanz des Übergangsgraphen voraus. Diese Forderung ist zumindest bei frei lebenden Tieren nur in einem begrenzten Lebensraum und über einen relativ kleinen Zeitraum realistisch. Beispielsweise werden insbesondere Wechselwirkungen mit anderen Arten (z. B. Konkurrenz, Symbiose) und Umwelteinflüsse (z. B. Nahrungsangebot, Wetterbedingungen) zu Veränderungen im Fortpflanzungszyklus führen. Im Modell bewirken diese Veränderungen andere Werte der Parameter, die z. B. ein zyklisches Verhalten der Population aus dem Gleichgewicht bringen können. Man sollte keine langfristigen Prognosen aus diesem Modell ableiten.		4	
	Insgesamt : 25 BWE	6	16	3

1.1.6 Flugbuchungen *GK*

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?
Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung nur 100 €.

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug
   - genau 84 Plätze,
   - höchstens 84 Plätze,
   - mindestens 90 Plätze

   tatsächlich genutzt werden?

   Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten?

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8% mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt?

d) Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft negative Einnahmen (Unkosten) in Höhe von 1000 €.

   Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

   Formulieren Sie einen Term, mit dem sich berechnen lässt, welche Einnahmen die Fluggesellschaft pro Flug erwarten kann.

   Erklären Sie die Bedeutung der auftretenden Teilterme.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Es müssen eine Modellbildung begründet und Darstellungsformen und Methoden aus dem Themenfeld Binomialverteilung angewendet und in einem Sachkontext interpretiert werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Binomialverteilung und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wurden im Unterricht behandelt. Die Schüler und Schülerinnen sind mit einem GTR vertraut.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR (der Speicher darf Programme enthalten)

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 min

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a	Der Sachverhalt wird wie folgt modelliert: Es wird angenommen, dass jeder der n Kunden, der ein Flugticket gekauft hat, den Flug mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 0,9 unabhängig von der Entscheidung aller anderen Kunden tatsächlich antritt. Damit wird der Sachverhalt durch eine Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p = 0,9 beschrieben. Die Annahmen treffen z.B. dann nicht zu, wenn - die Wahrscheinlichkeit einer Stornierung bei verschiedenen Kunden oder Kundengruppen (z.B. Geschäfts- und Privatkunden) unterschiedlich ist, - eine ganze Familie wegen Krankheit eines einzelnen Mitgliedes storniert oder wenn mehrere Stornierungen auf Grund höherer Gewalt im Zielgebiet erfolgen.		5	
b	X : Anzahl der tatsächlich genutzten Plätze X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,9 $P(X=84)=B(100;0{,}9;84)\approx 1{,}9\,\%$ $P(X\le 84)=\sum_{k=0}^{84} B(100\,;0{,}9\,;k)\approx 4{,}0\,\%$			

	$P(X \geq 90) = \sum_{k=90}^{100} B(100\,;0{,}9\,;k) \approx 58{,}3\,\%$ Erwartungswert der Einnahmen in € : E = 200 · 90 + 100 · 10 = 19 000	5	5	
c	Y : Anzahl der Passagiere, die den Flug tatsächlich antreten wollen Y ist binomialverteilt mit n = 108 und p = 0,9 $P(Y \geq 101) = \sum_{k=101}^{108} B(108;0{,}9;k) \approx 14{,}3\%$	2	4	
d	Einnahmen im Fall Y = 105 in € : 100·200 + 3·100 – 5·1000 = 15 300 Erwartungswert der Einnahmen in € : $E = T_1 + T_2 = \sum_{k=0}^{100} \left(k \cdot 200 + (108-k)\cdot 100\right) \cdot B(108;0{,}9;k) \quad +$ $\sum_{k=101}^{108} \left(100 \cdot 200 + (108-k)\cdot 100 - (k-100)\cdot 1000\right) \cdot B(108;0{,}9;k)$ T_1 beschreibt für Flüge ohne Überbuchung die Einnahmen durch k Passagiere, die tatsächlich fliegen, und die Einnahmen für (108 – k) Stornierungen. T_2 beschreibt für Flüge mit Überbuchung die Einnahmen durch 100 Passagiere, die tatsächlich fliegen und die Einnahmen durch (108 – k) Stornierungen abzüglich der Unkosten für (k – 100) Überbuchungen.	3	6	5
	Insgesamt 35 BWE	10	20	5

1.2 Weitere Beispiele für das Leistungskursfach

1.2.1 Telefondauer *LK*

Die Längen von Telefongesprächen lassen sich als Funktionswerte einer Zufallsvariablen X auffassen. X soll so festgelegt sein, dass 5 Minuten als eine Zeiteinheit dient.
Die Dichtefunktion ist durch folgende Funktion approximiert:

$$x \mapsto d(x) \;\text{ mit }\; d(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 4xe^{-2x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto d(x)$ den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt.
Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $x \mapsto D(x)$.

b) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen.
Beschreiben Sie den vorliegenden Sachverhalt anhand der Graphen.

c) Erörtern Sie die Bedeutung des Erwartungswertes μ.
Wie viel Prozent aller Gespräche sind länger bzw. kürzer als μ Zeiteinheiten ?
Erläutern Sie die unterschiedliche Größe der berechneten Prozentwerte im Zusammenhang mit dem gegebenen Sachverhalt.
Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Gespräche in den Intervallen $[\mu-\sigma\,;\,\mu]$ und $[\mu\,;\,\mu+\sigma]$ liegen, wobei σ die Standardabweichung ist.
Vergleichen Sie die errechneten Werte.
Veranschaulichen Sie die Ergebnisse an den Zeichnungen aus dem Aufgabenteil b).

d) Berechnen Sie die Stelle x_M ,an der $x \mapsto d(x)$ ein Maximum besitzt.

Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes für den gegebenen Sachverhalt.

Vergleichen Sie x_M und μ und begründen Sie den Unterschied.

Hinweis:
Eine Stammfunktion zu $x \mapsto x^2 \cdot e^{-2x}$ ist $x \mapsto -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\cdot e^{-2x}$,
eine Stammfunktion zu $x \mapsto x^3 \cdot e^{-2x}$ ist $x \mapsto -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right)\cdot e^{-2x}$.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Bei diesem Beispiel, das den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung, Mathematik, in der Fassung vom 1.12.1989“ entnommen ist, handelt es sich um eine Aufgabe, bei der neben Problemstellungen aus der Stochastik in allen Aufgabenteilen z.T. anspruchsvolle Probleme der Analysis bearbeitet werden müssen (Vernetzung). Die mit Hilfe der Analysis gefundenen Ergebnisse müssen am Sachproblem inhaltlich interpretiert und reflektiert werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Mit Erwartungswerten und Standardabweichungen, Dichte- und Verteilungsfunktionen wurde im Unterricht gearbeitet. Asymmetrische Dichtefunktionen sind im Unterricht jedoch nur wenig vorgekommen. Die Deutung in Aufgabenteil c) erfordert ein hohes Maß an Selbstständigkeit. Bekannt ist, dass diskrete Verteilungen durch stetige Verteilungen approximiert werden können. Der Vergleich von x_M und μ führt wieder auf die Asymmetrie. Die zur Bearbeitung der Aufgabenanteile aus der Analysis notwendigen Ansätze und Verfahren sind bekannt und geübt.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

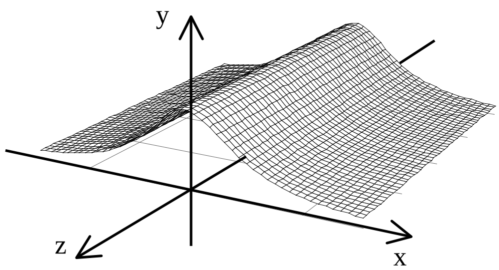
Vorgesehene Arbeitszeit: 100 min

1.2.2 Fläche im Raum *LK*

Die nebenstehende Figur zeigt einen Ausschnitt einer Fläche W.

Die Gleichung der Fläche lautet:

$$W: \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{1+s^2} \\ t \end{pmatrix}$$



a) Prüfen Sie, welche der Punkte Q(2|2|2,5), R(0|1|3) und S(1|0|–1) auf W liegen.

Wie kann man rechnerisch prüfen, ob ein Punkt P, der nicht auf W liegt, oberhalb oder unterhalb von W liegt?

b) Es wird die Ebenenschar E_c mit der Gleichung $E_c\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c = 0$ betrachtet.

Untersuchen Sie mögliche Schnitte der Ebenenschar mit der Fläche W und beschreiben Sie diese mit den Mitteln der analytischen Geometrie.

c) Zeigen Sie, dass der Schnitt der Fläche W mit der x-y-Ebene zur Kurve
k: $y = \frac{1}{1+x^2}$ führt.

Stellen Sie k graphisch dar und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen k und der x-Achse.

d) Die Kurve k aus Aufgabenteil c beschreibt bei Rotation um die x-Achse einen entlang der x-Achse unbegrenzten Rotationskörper $R_{x.}$ Die Kurve k beschreibt bei Rotation um die y-Achse oberhalb der x-z-Ebene einen ebenfalls unbegrenzten Rotationskörper R_y.

   Skizzieren Sie die Formen der Rotationskörper R_x und R_y .

   Dem Rotationskörper R_x kann man Zylinder –mit der x-Achse als Symmetrieachse– einbeschreiben. Ermitteln Sie einen Zylinder mit maximalem Volumen.

   Zeigen Sie, dass der Rotationskörper R_y kein endliches Volumen hat.

ANMERKUNGEN:

Die Bearbeitung dieser Aufgabe setzt eine spezielle Akzentsetzung in der Analysis oder in der Analytischen Geometrie voraus (Kurven und gekrümmte Flächen im Raum; vgl. Teil I, 1.3).

Zielsetzung:
Es müssen Darstellungsformen und Methoden aus den Sachgebieten Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Analysis flexibel interpretiert und teilweise vernetzend angewendet werden. Dabei sind auch Fallunterscheidungen zu treffen und deren Resultate geometrisch zu interpretieren. Die Bearbeitung der Aufgabenteile c) und d) erfordert eine gezielte Auswahl von Methoden aus den Bereichen der Differential- und Integralrechnung mit steigendem Grad an Komplexität.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Im Unterricht wurden verstärkt komplexere Aufgabenbeispiele bearbeitet, deren Lösung die Vernetzung verschiedener Sachgebiete erfordert. Die verwendeten Darstellungen und die anzuwendenden Verfahren aus den Bereichen der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra und der Analysis sind – mit Ausnahme der Ermittlung des maximalen Zylindervolumens im Teil d) – aus dem Unterricht bekannt. Die Methoden zur Untersuchung des Volumens eines Körpers vom Typ R_y wurden im Unterricht nur verbal kurz angedeutet.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 100 min

1.2.3 Pyramidenschar *LK*

Die Punkte O(0|0|0), A(8|0|0), B(0|4|0) und C_k(0|k|6) sind die Eckpunkte der Pyramidenschar $OABC_k$.

a) Es wird die Pyramide $OABC_0$ betrachtet.

   Zeichnen Sie ein Schrägbild dieser Pyramide.

   Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC_0 , den Schnittwinkel der Fläche ABC_0 mit der x_1-x_2-Ebene und den Abstand dieser Ebene vom Ursprung.

b) Es wird die Pyramidenschar $OABC_k$ betrachtet.

   Ermitteln Sie die Einsetzungen für k, für die das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist.

   Wo liegen alle Punkte C_k ?
   Zeichnen Sie die Punkte C_k in das vorhandene Schrägbild ein.
   Untersuchen Sie die Lage der Geradenschar g_{AC_k} durch die Punkte A und C_k .

   Untersuchen Sie die Größe des Pyramidenvolumens allgemein in Abhängigkeit von k und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

c) Behauptung: Wenn ein Vektor $\vec{a}$ sowohl zu einem Vektor $\vec{b}$ als auch zu einem

Vektor $\vec{c}$ senkrecht steht, so steht der Vektor $\vec{a}$ auch senkrecht zum Summenvektor $\vec{b}+\vec{c}$.

Erläutern Sie die Behauptung am Beispiel der Pyramidenschar und beweisen Sie die Behauptung.

Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Behauptung.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Lösung der Aufgabe fordert neben einer gut ausgebildeten Raumanschauung und einer sicheren Anwendung der analytischen Methoden der Vektorgeometrie auf unterschiedliche konkrete Beispiele (Anwendung auf innermathematische Probleme) auch die Erweiterung dieser Methoden unter Einbezug von Parametern, die Fähigkeit zur vollständigen Fallunterscheidung und die Interpretation von analytischen Lösungen.
Der selbstständige Umgang mit einer Implikation, ihrer Umkehrung, dem Beweis bzw. der Widerlegung soll in einer überschaubaren geometrischen Situation überprüft werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind geübt im Anfertigen von Schrägbildern und im Berechnen von konkreten Längen, Winkeln und Abständen bei geometrischen Figuren im Raum. Auf die Festigung der Raumanschauung wurde Wert gelegt. Figurenscharen und die Ermittlung von konkreten Figuren nach vorgegebenen Bedingungen aus einer Figurenschar wurden zwar behandelt, aber nicht intensiv geübt.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 100 min

1.2.4 Supermärkte *LK*

In der Nähe der zwei Supermärkte Altkauf (A) und Billigkauf (B) wird ein neuer Supermarkt Neukauf (N) eröffnet. Bisher waren die beiden Supermärkte A und B die einzigen größeren Einkaufsmärkte in der Umgebung. Altkauf hatte einen Marktanteil von 60 % und Billigkauf einen Marktanteil von 40 %.
Ein Marktforschungsunternehmen erhält den Auftrag, die zukünftigen Marktpositionen zu analysieren. Die Marktforschungsabteilung des neuen Supermarktes N rechnet mit folgenden wöchentlichen Kundenwanderungen (d. h. Anteil der Kunden, die pro Woche von einem Markt zu einem anderen wechseln):
In jeder Woche werden 20 % der bisherigen Kunden von Altkauf zu Neukauf und 30 % der Billigkauf-Kunden zu Neukauf wechseln. Außerdem werden 10 % der Neukauf-Kunden wieder zu Altkauf und weitere 10 % zu Billigkauf wechseln.

a) Veranschaulichen Sie die Kundenwanderungen in einem Übergangsgraphen.

   Erläutern Sie, dass die Kundenwanderung durch die Übergangsmatrix
   $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

   Welchen Marktanteil hätte jeder der drei Märkte bei der ermittelten Kundenwanderung nach 2 Wochen?

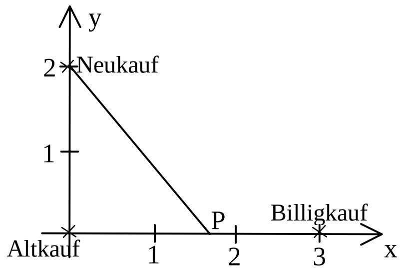
b) Überprüfen Sie, ob sich langfristig eine feste Verteilung der Marktanteile der drei Supermärkte ergibt. Geben Sie gegebenenfalls diese Verteilung an.

   Untersuchen Sie, ob sich die langfristige Verteilung der Marktanteile ändern würde, wenn Altkauf und Billigkauf vor der Eröffnung von Neukauf die gleichen Marktanteile gehabt hätten.

Wie würden sich die langfristigen Marktanteile verändern, wenn nach einigen Wochen wöchentlich etwa 1% der Kunden von Billigkauf zu einem weiter entfernten Supermarkt Centralkauf wechseln würden?

c) Neukauf lockt mit Sonderangeboten Käufergruppen von Altkauf und Billigkauf. Für welche Kundenwanderungsquoten a (Wechselanteil von A zu N) und b (Wechselanteil von B zu N) hätten die Märkte A,B und N auf lange Sicht gleiche Marktanteile, wenn angenommen wird, dass gleichzeitig die Kundenwanderungsanteile von N zu A und von N zu B jeweils 10% betragen.

d) Die Märkte A, B und N liegen an zwei Straßen, die sich rechtwinklig bei A kreuzen. Billigkauf liegt 3 km von Altkauf entfernt. Neukauf liegt 2 km von Altkauf entfernt. Da die Märkte B und N zu der gleichen Ladenkette gehören, sollen sie vernetzt werden. Die Verlegung eines entsprechenden Kabels kostet 6000 € pro km, wenn bestehende Schächte entlang einer Straße benutzt werden können, und 8000 € bei Verlegung im freien Gelände.



Berechnen Sie die Kosten bei einer Verlegung entlang der bestehenden Straßen und vergleichen Sie diese mit den Kosten bei einer ausschließlichen Verlegung durch das Gelände.

Zeigen Sie, dass es einen Abzweigungspunkt P zwischen Altkauf und Billigkauf gibt, so dass die Verlegungskosten minimal sind. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P und geben Sie die minimalen Kosten an.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Aufgabe spricht unterschiedliche Sachgebiete in einem verbindenden Kontext an. Die Ergebnisse der Rechnungen sind anwendungsbezogen zu interpretieren.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Im Unterricht wurden mehrstufige Prozesse behandelt und geübt.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 100 min

1.2.5 Mini-Van *LK*

Der Automobilkonzern PSW stellt einen neuen Mini-Van her, der sich u. a. durch geringen Verbrauch auszeichnen soll.
Bei 100 Testfahrzeugen mit einem 20-Liter-Tank wurde die Anzahl N für den Aktionsradius X (in km) gemessen und in der folgenden Tabelle festgehalten:

X	(420;440]	(440;460]	(460;480]	(480;500]	(500;520]	(520;540]	(540;560]	(560;580]	(580;600]
N	2	10	14	25	21	16	8	3	1

a) Beschreiben Sie den Aufbau eines Wahrscheinlichkeitspapiers und erläutern Sie seine Verwendung.

Bearbeiten Sie unter Verwendung von Wahrscheinlichkeitspapier folgende Teilaufgaben:

(1) Weisen Sie nach, dass X näherungsweise normalverteilt ist.

(2) Bestimmen Sie Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

(3) Ermitteln Sie damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Testfahrzeug einen Aktionsradius von höchstens 460 km hat und vergleichen Sie das Ergebnis mit den empirischen Werten.

Beschreiben Sie ein Verfahren ohne Verwendung von Wahrscheinlichkeitspapier für den Nachweis, dass X näherungsweise normalverteilt ist und vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem grafischen Verfahren.

Die Zufallsgröße X wird für die folgenden Teilaufgaben N(500;30)-verteilt angenommen.

b) Welchen Abstand dürfen zwei Tankstellen T_1 und T_2 höchstens voneinander haben, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 mit einer Tankfüllung von T_1 nach T_2 kommen will?

c) Der Mini-Van soll als neues Spar-Auto mit entsprechend kleinem 20-Liter-Tank in der Presse vorgestellt werden. Die Werbeabteilung schlägt vor, den Durchschnittsverbrauch mit 3,9 Litern pro 100 km anzugeben. Die Techniker dagegen schlagen vor, den Verbrauch besser mit 4,2 Litern pro 100 km anzugeben.

   Welche Gründe könnten zu diesen unterschiedlichen Empfehlungen geführt haben?

   Beurteilen Sie beide Vorschläge quantitativ.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Zur Lösung der Aufgaben wird neben der Ermittlung der Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Sicherheit in der Modellierung konkreter Situationen und die differenzierte Angabe verbaler Begründungen verlangt. Zusätzlich wird die Fähigkeit zur Interpretation und beurteilenden Stellungnahme in mehreren unterschiedlichen Situationen erwartet.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Den Schülerinnen und Schülern ist der Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitspapier und den entsprechenden im GTR implementierten Funktionen bekannt. Die Modellierung von realitätsnahen Situationen kam häufig im Unterricht vor. Die Interpretation von Modellergebnissen in glaubwürdigen Kontexten erfordert trotz der unterrichtlichen Behandlung jeweils Eigenständigkeit im Auffinden, Abwägen und Beurteilen von Einzelaspekten.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 Minuten

1.3 Weitere Beispiele für das Grundkursfach

1.3.1 Defekte Geräte *GK*

Eine Firma prüft, ob sie ihren Kunden für ein Gerät eine Anschlussgarantie nach Ablauf der gesetzlichen Garantiezeit anbieten kann.
Aus der Erfahrung kann die Firma für den Zeitraum der Anschlussgarantie folgende Annahmen treffen:

(1) Bei den drei Einzelteilen T_1, T_2 und T_3 des Gerätes kommt es unabhängig voneinander zu einem Defekt, und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,2.

(2) Ein repariertes Einzelteil des Gerätes fällt in dem betrachteten Zeitraum nicht noch einmal aus.

(3) Die Materialkosten bei der Reparatur betragen 50 € für T_1, 40 € für T_2 und 10 € für T_3.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die möglichen Kombinationen von Reparaturfällen bei einem Gerät auftreten können.

b) Bei wie vielen von 1000 Geräten muss mit mindestens einer Reparatur gerechnet werden?
Wie viele Einzelreparaturen fallen bei 1000 Geräten im Durchschnitt an?
Mit welchen Materialkosten muss die Firma bei 1000 Geräten rechnen?

c) Für die Reparatur jedes Einzelteils entstehen 30 € an Arbeitskosten. Die Firma untersucht drei Arten von Kaufverträgen.
Variante 1: Für das Gerät wird keine Anschlussgarantie übernommen.
Variante 2: Für das Gerät wird eine Anschlussgarantie nur für Materialkosten übernommen. Dafür wird der Preis des Gerätes um 20 € erhöht.
Variante 3: Für das Gerät wird eine Anschlussgarantie für Material- und Arbeitskosten übernommen. Für diese Vollgarantie wird der Preis des Gerätes um weitere 15 € erhöht.-

Beurteilen Sie die Varianten aus Sicht der Firma und der Kunden.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Bei diesem Beispiel, das im Wesentlichen den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik in der Fassung vom 1.12.1989“ entnommen ist, handelt es sich um eine traditionelle Aufgabenstellung aus dem Gebiet der Stochastik. Sie zielt auf die Anwendung stochastischer Grundbegriffe in einer klar umrissenen Ausgangssituation.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Zuordnung von anwendungsnahen Sachverhalten zum Modell eines mehrstufigen Zufallsexperimentes, die Auswertung von Baumdiagrammen und die Übertragung auf Aussagen über absolute Häufigkeiten wurden an verschiedenen Beispielen im Unterricht geübt. Der Sachverhalt in Teilen von b) ist zwar komplex, die numerische Auswertung stellt aber keine besonderen Anforderungen. Die Analyse zu Teilen von c) und die zur Beurteilung erforderliche Berechnung sind in dieser Kombination neu. Auch die notwendige numerische Auswertung und die Interpretation des Ergebnisses erfordern Einblick in die Komplexität des Sachverhaltes.

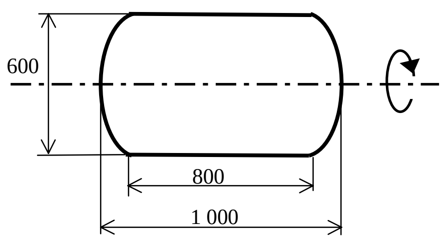
Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Arbeitszeit: 90 min

1.3.2 Wassertank — *GK*

a) Leiten Sie die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$ her, mit der das Volumens eines Körpers, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht, berechnet werden kann.

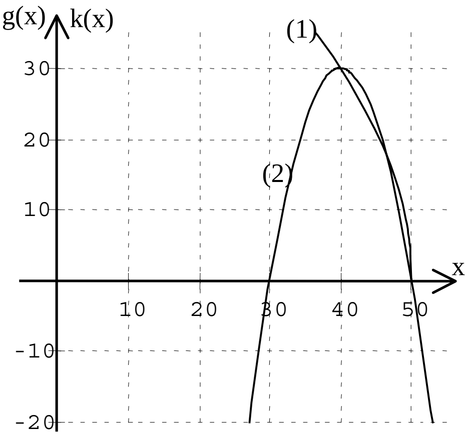
b) Ein liegender Wassertank besteht aus einem Zylinder mit zwei kuppelförmigen Aufsätzen.
Die Abmessungen sind der nebenstehenden Skizze des Querschnitts des Wassertanks zu entnehmen. Die Maße sind in Millimetern angegeben. Die



Skizze ist nicht maßstäblich.

Schätzen Sie mit einfachen geometrischen Mitteln ab, dass weniger als 300 Liter in den Tank passen.

c) In der nebenstehenden Zeichnung sind die Graphen der Funktionen g und k mit $g(x) = \sqrt{4500 - 90x}$ und $k(x) = -0{,}3 \cdot (x-40)^2 + 30$ angegeben.



Begründen Sie, welcher der beiden Graphen der von g und welcher der von k ist.

Zeigen Sie, dass man mit beiden Funktionen die kuppelförmigen Aufsätze des Wassertanks näherungsweise beschreiben kann und beurteilen Sie die Güte der Näherungen.

Bestimmen Sie das Volumen des Wassertanks mit Hilfe von g(x).

d) Der Wassertank wird bei konstanter Zuflussrate gefüllt.

Skizzieren Sie den Graphen für die jeweilige Funktion H(t) (t: Zeit seit Füllbeginn; H(t): Höhe der Wasseroberfläche im Tank über dem Boden zur Zeit t), wenn der Tank auf einer der beiden Kuppeln steht bzw. auf der Seite liegt.

Erläutern Sie den Verlauf der Graphen.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Aufgabe ermöglicht eine Lösung auf unterschiedlichen Niveauebenen. Dabei müssen Modellierungen und eine inhaltliche Reflexion vorgenommen werden. Die Bearbeitung der Aufgabenstellungen erfordert bei den komplexeren Aufgabenteilen einen sicheren Umgang mit Funktionen und Funktionsgraphen.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Im Unterricht wurden die gängigen Verfahren der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen und Wurzelfunktionen behandelt und geübt. In diesem Zusammenhang wurde auch auf die qualitative Analyse von Graphen besonders geachtet.
Die Schülerinnen und Schüler haben Verfahren der Integralrechnung zur Bestimmung von Rotationsvolumina kennen gelernt.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 min

1.3.3 Vierecke und Pyramiden *GK*

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3|3|–2), B(5|7|2), C(1|9|6), D(–1|5|2) und $P_a(-4|2a|a)$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E. Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form.

Für genau einen Wert a liegt der zugehörige Punkt P_a in der Ebene E. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

b) Es existiert mindestens ein Punkt F, so dass die Punkte A, B, C und F Eckpunkte eines Trapezes mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) sind:

(1) $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$,

(2) eine der beiden parallelen Seiten ist doppelt so lang wie die andere der parallelen Seiten.

Berechnen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes F.

Ermitteln Sie alle Trapeze mit den Eigenschaften (1) und (2).

c) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Das Viereck ABCD ist Grundfläche von Pyramiden mit der Höhe $\sqrt{65}$. Berechnen Sie das Volumen einer solchen Pyramide.

Es gibt genau zwei solche Pyramiden, deren Höhen parallel zur Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ verlaufen und die den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche als Höhenfußpunkt haben.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen dieser Pyramiden sein können.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Insbesondere die Bearbeitung der Aufgabenteile a) und c) ermöglicht unterschiedliche Lösungsvarianten. Es ist intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler die geometrischen Probleme in einzelne Standardprobleme zerlegen und deren Bearbeitung speziellen Programmen des GTR übertragen.
Die Aufgabenteile b) und c) stellen Anforderungen an das räumliche Anschauungsvermögen mit wachsendem Niveau, indem Sachverhalte in der Ebene und im Raum zu erfassen sind.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind es gewohnt, Aufgaben nach unterschiedlichen Lösungsansätzen zu bearbeiten und verschiedene Lösungswege miteinander zu vergleichen. Dabei setzen sie außer Nachschlagewerken auch unterschiedliche Implementationen und Programme des GTR ein.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR (der Speicher darf Programme enthalten)

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 60 min

1.3.4 Sinus *GK*

Die Sinusfunktion s mit s(x) = sin x soll im Intervall [0; π] durch unterschiedliche quadratische Funktionen f, g und h angenähert werden. Jede dieser quadratischen Funktionen besitzt im betrachteten Intervall die gleichen Nullstellen wie die Sinusfunktion sowie jeweils eine weitere spezielle Eigenschaft:

(1) Die Funktionen f und s haben das gleiche Maximum.

(2) Die Graphen der Funktionen g und s haben an den beiden Nullstellen jeweils den gleichen Anstieg.

(3) Die Graphen der Funktionen h und s schließen jeweils mit der x-Achse gleich große Flächenstücke ein.

a) Bestimmen Sie die Funktionsterme für die Funktionen f, g und h.

b) Beurteilen Sie die Annäherung der Sinusfunktion durch die Funktionen f, g und h.

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Dieses Beispiel ist in Teilen den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik in der Fassung vom 1.12.1989“ entnommen. Im Vordergrund steht die Approximation der Sinusfunktion unter Berücksichtigung verschiedener Bedingungen (innermathematische Modellierung). Die Güte der Approximation ist zu beurteilen.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Der Umgang mit trigonometrischen Funktionen sowie das Approximieren von Funktionen wurden im Unterricht geübt. Dabei wurde der GTR als Kontrollinstrument verwendet.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 70 min

1.3.5 Spiel mit Münzen *GK*

a) Anke hat Langeweile und wirft wiederholt eine Münze. Sie zählt jeweils die Anzahl der Würfe, bis zweimal hintereinander ‚Kopf' gefallen ist. Beate beobachtet sie und behauptet: „Du musst nicht so oft werfen, wenn Du auf ‚Erst Zahl und dann Kopf ' wartest". Anke widerspricht: „Das ist doch egal".

   Beschreiben Sie die Situation mathematisch. Verwenden Sie dabei zur Darstellung der Varianten auch Übergangsgraphen.

   Nehmen Sie zu den beiden Behauptungen unter der Voraussetzung Stellung, dass die Münze ideal ist.

b) Die beiden Mädchen beschließen, daraus ein Gewinnspiel zu machen: Sie geben beide einen Einsatz und werfen eine (ideale) Münze so lange, bis die Sequenz KKK oder aber die Sequenz ZKZ erschienen ist. Im ersten Fall bekommt Anke, im zweiten Fall bekommt Beate den Gesamteinsatz.

   Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die beiden Spielerinnen.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der jeweils benötigten Würfe pro Spiel.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel aus der Teilaufgabe b) nach drei bzw. fünf Würfen noch nicht entschieden ist?

ANMERKUNGEN:
Die Bearbeitung dieser Aufgabe setzt eine spezielle Akzentsetzung im Stochastikunterricht voraus (endliche absorbierende Markov-Ketten; vgl. Teil I, 1.3).

Zielsetzung:
Zur Modellierung der Spiele müssen Begriffe und Methoden der Stochastik und der linearen Algebra verwendet werden (Vernetzung). Die Ergebnisse müssen im Sachkontext interpretiert werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Im Unterricht wurden Beispiele endlicher absorbierender Markov-Ketten behandelt, einschließlich der zugehörigen Mittelwertregeln.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 min

2 Aufgabenbeispiele für die mündliche Prüfung

Die folgenden Aufgabenbeispiele sind Teile von möglichen Prüfungsaufgaben, die unterschiedliche Vorbereitungs- und Bearbeitungszeiten erfordern. Sie sollen die Eigenart und besondere Zielsetzung von mündlichen Prüfungen im Unterschied zur schriftlichen Prüfung verdeutlichen.

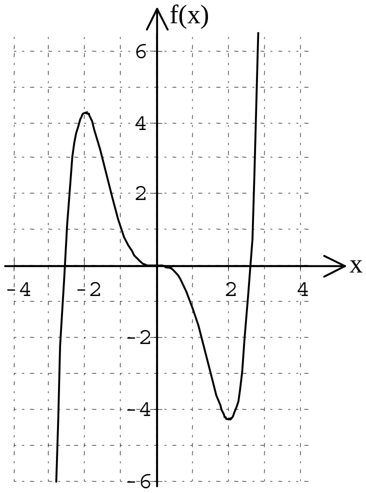
2.1 Ganzrationale Funktion

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ und ihr Graph G_f .

a) Begründen Sie, dass der Graph von f die angegebene Form hat (die y-Werte der Extrem- und Wendepunkte müssen nicht berechnet werden).

b) Skizzieren Sie in das gleiche Achsenkreuz den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie, wie die Graphen von f' und von f zusammenhängen.

c) Erläutern Sie die Schritte, die zur Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse erforderlich sind.



LÖSUNGSSKIZZE:

a) Die Lösung kann rechnerisch oder durch qualitative Überlegungen ermittelt werden. Zu berücksichtigen sind: Grenzwerte von f(x) für $x \to \pm\infty$, Symmetrie des Graphen von f , Zahl der Nullstellen, Zahl der Stellen mit waagerechter Tangente, Zahl der Wendepunkte.

b) Es wird erwartet, dass der Graph von f' durch graphisches Differenzieren gewonnen wird.
Von besonderer Bedeutung sind dabei die Extrempunkte, Wendepunkte und der Sattelpunkt des Graphen von f.

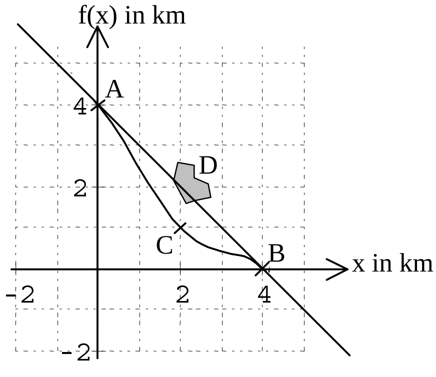
c) Verwendung der Symmetrie zu (0|0): $A = 2 \cdot \left| \int_0^{N_1} f(x)dx \right|$

Eingegangen werden muss auf die Benutzung des Betrags, auf die erforderliche Bereichsunterteilung und auf die Benutzung einer Stammfunktion bei der Integralberechnung.

2.2 Umgehungsstraße

Um die Ortschaft D, die an der geraden Straße durch A und B liegt, wird eine Umgehungsstraße gebaut. Diese soll in A und B tangential in die alte Straße münden und durch den Punkt C gehen.

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht. Erläutern Sie Ihren Ansatz.



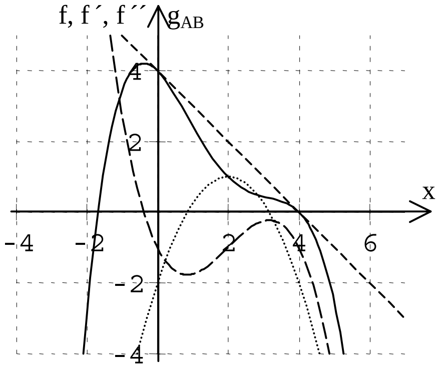
b) Zeichnen Sie die Graphen von f, f' und f'' mit Hilfe des Rechners in ein gemeinsames Koordinatensystem. Erläutern Sie daran die Zusammenhänge zwischen f'', f' und f und ziehen Sie Schlussfolgerungen für markante Punkte des Graphen von f.

c) Untersuchen Sie, ob sich die neue Straßenverbindung an den Einmündungsstellen „ruckfrei“ durchfahren läßt.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Mit den aus der Aufgabenstellung begründbaren Bedingungen f(0) = 4, f(2) = 1, f(4) = 0, f ´(0) = –1 und f ´(4) = –1 lässt sich das Gleichungssystem mit 5 Variablen eindeutig lösen.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 4$.

b) 

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

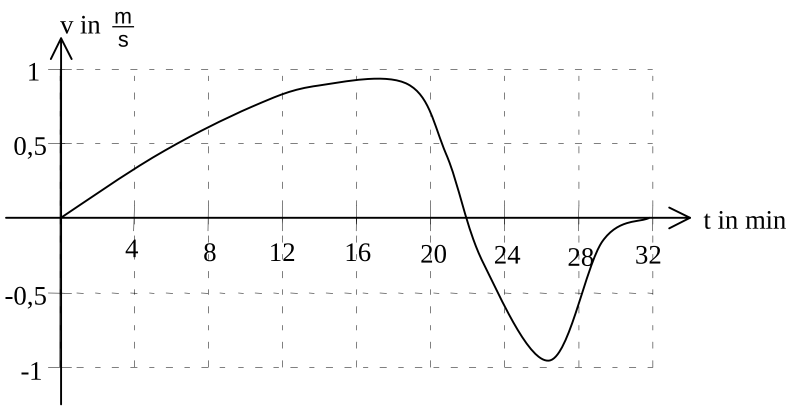
$f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 2$

$g_{AB}(x) = 4 - x$

Gefordert ist die Erläuterung der Beziehungen der Graphen untereinander (Extrempunkte, Wendepunkte usw.)

c) Da $f''(0) = -2 < 0$ und $f''(4) = -2 < 0$, ist der Graph von f an den beiden Übergangsstellen rechtsgekrümmt, im Gegensatz zur Geraden g_{AB}, die keine Krümmung aufweist; deshalb lässt sich die Straßenverbindung nicht „ruckfrei“ durchfahren. Die Charakterisierung „ruckfrei“ bietet Anlass für vertieftes Hinterfragen.

2.3 Heißluftballon



Das Diagramm zeigt die Vertikalgeschwindigkeit v (positiv bei Aufwärtsbewegung) eines Heißluftballons in Abhängigkeit von der Fahrzeit t. Der Ballon startet zum Zeitpunkt t = 0 in 300 m Höhe über NN.

a) Erläutern Sie den Flugverlauf des Ballons.

b) Wann wurde die maximale Flughöhe erreicht?
Bestimmen Sie diese Flughöhe näherungsweise.
Beschreiben Sie weitere mögliche Wege zur Bestimmung der Flughöhe.

c) Vergleichen Sie die Höhen von Startplatz und Landeplatz.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Ballon steigt während der ersten 22 Minuten, wobei die Steiggeschwindigkeit zunächst 18 Minuten lang wächst und dann abnimmt.
Anschließend sinkt er bis zur Landung nach 32 Minuten. Die größte Sinkgeschwindigkeit erreicht er nach ca. 26 Minuten.

b) Maximale Flughöhe zum Zeitpunkt 22 Minuten.
Ermittlung der Flughöhe durch Bestimmung des Inhalts der Fläche unter der Kurve im ersten Quadranten (wegen der unterschiedlichen Einheiten ist der Faktor 60 zu berücksichtigen).
Diese Teilaufgabe lässt verschiedene Wege der Approximation zu: Näherungsweise durch Auszählen der Quadrate, durch Ausgleichsrechtecke bzw. Ausgleichstrapeze oder durch Approximation der Kurve durch eine geeignete Funktion.
Maximale Flughöhe ca. 840 m.

c) Die Fläche zwischen Kurve und t-Achse im vierten Quadranten beschreibt die beim Sinken zurückgelegte Höhe. Der Ballon sinkt ca. 240 m, d.h. der Landeplatz liegt ca. 900 m über NN.

2.4 Geradenschar

Gegeben ist die Gerade g mit $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Geraden g in das Koordinatensystem auf der beiliegenden Folie.

b) Bestimmen Sie aus der Geradenschar mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

diejenige Gerade, die parallel zu g verläuft.

c) Zwei parallele, nicht identische Geraden bestimmen eine Ebene.
Erläutern Sie, wie Sie eine Gleichung dieser Ebene erhalten.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Schrägbild der Geraden unter Verwendung der Spurpunkte $S_1(3|2|0)$ und $S_2(3|0|3)$ zeichnen

b) h sei eine Gerade aus der Geradenschar:

$$h \,||\, g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c = 2 \ \wedge\ a = 0 \ \wedge\ b = -1{,}5$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

c) $g_1 \,||\, g_2$
Es gibt unter anderem folgende Möglichkeiten:
(1) Bestimmung der Ebenengleichung in Parameterform unter Verwendung von drei Punkten auf den Geraden g_1 oder g_2 (zwei Punkte auf g_1 und ein Punkt auf g_2, bzw. umgekehrt).
(2) Bestimmung der Ebenengleichung in Parameterform unter Verwendung zweier Punkte (ein Punkt auf g_1 und ein Punkt auf g_2) und des Richtungsvektors einer der Geraden.

(3) Bestimmung der Ebenengleichung in Normalenform unter Verwendung zweier Punkte (ein Punkt auf g_1 und ein Punkt auf g_2) und des Richtungsvektors einer der Geraden.

2.5 Normalenform

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$.

a) Wo schneiden sich die Gerade g und die Ebene E?

b) Begründen Sie, dass die Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ ebenfalls die Ebene E beschreibt.

c) Die in der Teilaufgabe b) angegebene Ebenengleichung hat die Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$.
Welche geometrische Bedeutung haben dabei die Vektoren $\vec{n}$, $\vec{a}$ und $\vec{x}$?

d) Interpretieren Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ in der Ebene und im Raum.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Einsetzen von g in E, Bestimmung des Parameters r = –5.
Rückeinsetzen von r in g ergibt als Schnittpunkt (–8|–10|0).

b) Z. B. durch Umwandeln der Ebenengleichung in der Teilaufgabe b) durch Ausmultiplizieren in die gegebene Form.

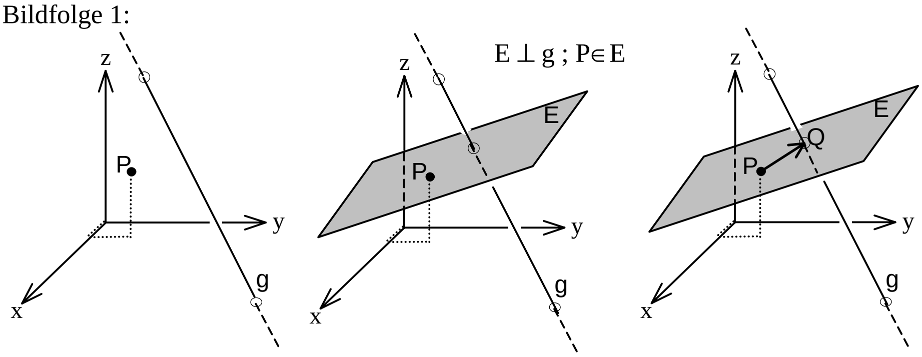
c) Erläuterung an einer Skizze unter Einzeichnen der gegebenen Vektoren:
$\vec{n}$: Normalenvektor $\vec{a}$: Stützvektor
$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigem Punkt auf der Ebene

d) In der Ebene: Gerade durch den Punkt A, die senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ verläuft.
Im Raum: Ebene durch den Punkt A, die senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ verläuft.

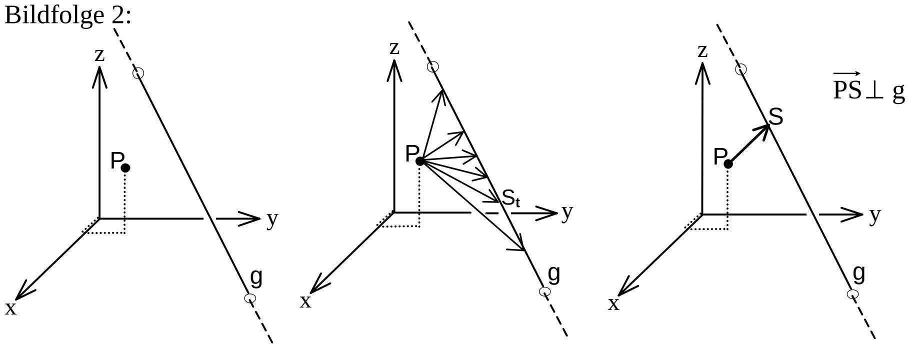
2.6 Verfahren zur Abstandsberechnung

In den anschließenden Bildfolgen werden auf der beiliegenden Folie drei verschiedene Wege dargestellt, wie der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g berechnet werden kann.

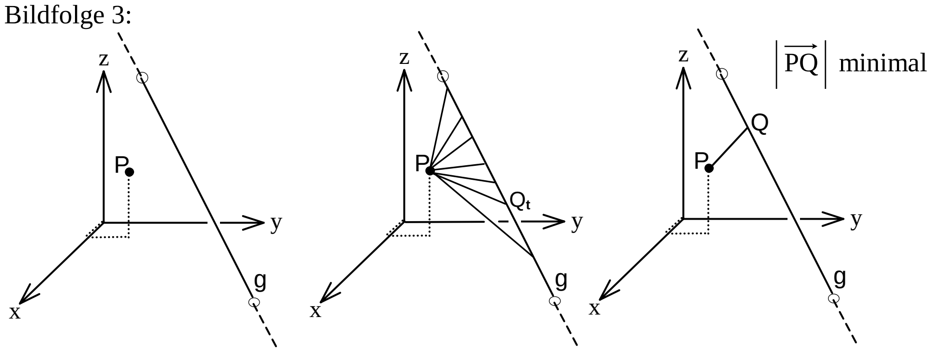
Bildfolge 1:



Bildfolge 2:



Bildfolge 3:



Erläutern Sie die drei Wege.
Geben Sie dazu die einzelnen Arbeitsschritte an, die für jeden Weg erforderlich sind, um den Abstand zu berechnen.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Eine Gleichung der Ebene E mit $P \in E$ und $E \perp g$ z.B. in Normalenform bestimmen; den Schnittpunkt Q von E mit g ermitteln; den Abstand der Punkte P und Q berechnen.

b) S_t beliebig auf g wählen; $\overrightarrow{PS_t}$ mit Hilfe der Gleichung für g darstellen; aus $\overrightarrow{PS_t} \cdot \vec{u} = 0$ ($\vec{u}$ ist Richtungsvektor von g) den konkreten Wert für den Parameter t berechnen; den Ortsvektor für S mit Hilfe des errechneten Parameters angeben; den Abstand der Punkte P und S berechnen.

c) Q_t beliebig auf g wählen; $\overrightarrow{PQ_t}$ mit Hilfe der Gleichung für g beschreiben; das Problem „$\left|\overrightarrow{PQ_t}\right|$ minimalisieren“ durch die Extremwertuntersuchung einer ganzrationalen

Funktion 2. Grades lösen.

2.7 *Abstände*

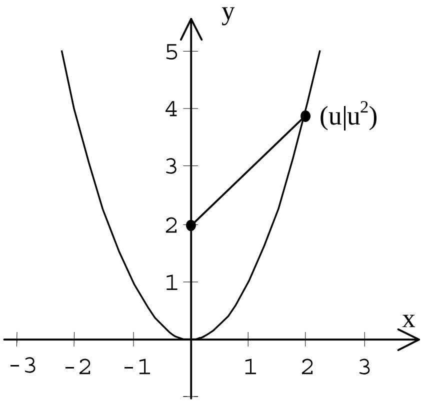
Bei der Untersuchung geometrischer Objekte müssen häufig Abstände bestimmt werden.

a) Erläutern Sie eine Methode, mit der man den Abstand eines Punktes von einer Ebene im Raum bestimmen kann.

b) Wie kann man vorgehen, um entsprechend der nebenstehenden Zeichnung den Abstand des Punktes (0|2) von der Normalparabel zu bestimmen?

   Ermitteln Sie diesen Abstand.

c) Vergleichen und beurteilen Sie Ihre Vorgehensweisen in den Aufgabenteilen a) und b).



LÖSUNGSSKIZZE:

a) Ermittlung der Parametergleichung der Lotgeraden g zur Ebene E, die durch den vorgegebenen Punkt P verläuft; Bestimmung von $S = g \cap E$; Berechnung von $\left|\overrightarrow{SP}\right|$ ergibt den gesuchten Abstand.

   Wurden im Unterricht Funktionen mit mehreren Veränderlichen behandelt, dann steht auch eine Lösungsmöglichkeit durch Minimierung der Abstandsfunktion zur Verfügung.

b) Bestimmung der lokalen Extrema der Funktion d, die den Abstand von einem Punkt auf der Normalparabel zum Punkt mit den Koordinaten (0|2) beschreibt; Bestimmung der Minima; für $u = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ergeben sich minimale Entfernungen von jeweils $d\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 1{,}32$.

   Lösungsvariante unter Verwendung von Normalen: Ermittlung der Tangente und der Normale im Punkt $P(u|u^2)$; Ermittlung der Normalen, die durch den Punkt Q(0|2) verlaufen ergibt die Punkte $P_E(u_E|u_E^2)$ auf der Normalparabel, die einen lokalen Extremwert für den gesuchten Abstand liefern; Bestimmung der Abstände $\overline{P_E Q}$ und Auswahl der Minima.

c) Bei der Charakterisierung der Vorgehensweisen soll herausgearbeitet werden, dass zur Abstandsberechnung spezifische Strategien der Sachgebiete „Analytische Geometrie“ (Orthogonalisierung) und „Analysis“ (Minimierung) zum Einsatz kommen können.

2.8 *Blutgruppen*

In den 70er Jahren waren in der Bevölkerung von Deutschland die verschiedenen Blutgruppen folgendermaßen prozentual verteilt:

0: 36,5% **A**: 42,5% **B**: 14,5% **AB**: 6,5%

Die seltene Blutgruppe AB ist von besonderem Interesse. Eine Zeitung behauptet, der Anteil der Blutgruppe AB sei gestiegen.
Diese Behauptung soll überprüft werden.

a) Wie würden Sie vorgehen, um die Behauptung zu überprüfen?

   Benennen Sie mögliche Schwierigkeiten im konkreten Vorgehen.

b) Bei 500 Personen wurde eine Blutuntersuchung durchgeführt. Dabei wurde bei 45 die Blutgruppe AB festgestellt. Es wurde ein einseitiger Test durchgeführt mit der Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0{,}065$. Was wollte man mit diesem Test nachweisen?
   Ziehen Sie aus dem Ergebnis des Tests auf dem Signifikanzniveau 5% Ihre Schlüsse.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Entwurf eines einseitigen Test mit der Nullhypothese $p \leq 0{,}065$ auf der Grundlage eines vorgewählten Stichprobenumfangs und Signifikanzniveaus. Bestimmung des Ablehnungsbereichs.
   Zufällige Auswahl von Personen aus der Gesamtbevölkerung.
   Beobachtung des Merkmals ‚Blutgruppe AB'.
   Entscheidung, ob die Nullhypothese abzulehnen ist oder nicht.

   Beispiele für mögliche Schwierigkeiten: Zufälligkeit der Auswahl; Wahl des Stichprobenumfangs; Modellierung als ‚Ziehen mit oder ohne Zurücklegen'; Formulierung der Nullhypothese.

b) Man wollte statistisch begründen, dass der Anteil an Personen in Deutschland mit der Blutgruppe AB gestiegen ist. Wenn man auf dem 5% - Signifikanzniveau einen einseitigen Hypothesentest durchführt, so liegt der Ablehnungsbereich bei $k > 42$. Insofern ist die Nullhypothese zu verwerfen, die Behauptung ist statistisch signifikant auf dem 5% - Niveau begründet.

2.9 Bergsteiger

Über den berühmten Bergsteiger Wolfgang Bergfried stand unter der Überschrift

´Überlebt - Alle 14 Achttausender'

vor einigen Jahren in der Zeitung:

„Wenn man bedenkt, dass die Todesquote bei den Achttausender-Bergsteigern 3,4% beträgt, hätte Wolfgang Bergfried bei seinen bisher 29 Expeditionen zu den höchsten Bergen der Welt mit 99% Wahrscheinlichkeit umkommen müssen."

Dieser Artikel liegt schon einige Jahre zurück. Inzwischen hat Wolfgang Bergfried wieder einige Achttausender bestiegen und er lebt immer noch.
Ist das ein Wunder?

ANMERKUNG:

Die Aufgabe kann in dieser Form nur verwendet werden, wenn die Schülerinnen und Schüler es gewohnt sind mit offenen Aufgabenstellungen umzugehen und auch Modellierungsfragen im Unterricht eine wesentliche Rolle gespielt haben. Andernfalls sind Strukturierungshilfen unverzichtbar.

LÖSUNGSSKIZZE:

Es fällt auf, dass der Zeitungsredakteur die Wahrscheinlichkeit 3,4% mit 29, der Anzahl der Expeditionen, multipliziert hat. Das kann auf keinen Fall richtig sein, da sich ab 30 Expeditionen ein Wert größer als 100% ergäbe.

Nimmt man eine stochastische Unabhängigkeit der Achttausender-Besteigungen hinsichtlich des tödlichen Verlaufs an, so kann man das Geschehen bei 29 Besteigungen als Bernoulli-Kette der Länge $n = 29$ mit $p = 0{,}034$ modellieren und erhält im Gegensatz zur Aussage in der Zeitung die Wahrscheinlichkeit für „mindestens einen Todesfall“ zu $1-0{,}966^{29} \approx 63\%$.

Aber auch in anderer Hinsicht sind die Ausführungen im Zeitungsartikel daraufhin kritisch zu hinterfagen, woher die angegebene ‚Todesquote’ von 3,4% eigentlich kommt. Wenn sie der amtlichen Statistik der Behörden, die die Achttausender-Expeditionen genehmigen, entnommen ist, so bezieht sie sich wahrscheinlich auf alle Personen, die mit dem Ziel einer Achttausender-Besteigung gestartet sind; darunter sind viele Unerfahrene und Leichtsinnige. Der ‚berühmte Bergsteiger’ ist aber besonders qualifiziert und sehr leistungsfähig. Für seinen Fall müsste man daher sicher von einer deutlich niedrigeren Todeswahrscheinlichkeit als 3,4% ausgehen.

2.10 Zeichenübertragung

Beim Lesen eines bestimmten Dokuments beträgt für jedes übertragene Zeichen die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Übertragung 5 %.

a) Beschreiben Sie das Erkennen der Zeichenkette „fliegemorgennachmittag“ als Zufallsversuch.

b) Wie viele fehlerhafte Zeichen kann man beim Erkennen dieser Zeichenkette erwarten?

c) Für ein bestimmtes Ereignis E erhält man P(E) = $231 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{20}$.
Erläutern Sie, um welches Ereignis E es sich in diesem Zusammenhang handeln kann, welche Bedeutung die Faktoren haben und warum man diese mit einander multiplizieren muss, um P(E) zu bekommen.

LÖSUNGSSKIZZE:

a) Man kann das Senden von n Zeichen mit Beobachtung von Übertragungsfehlern als n-gliedrige Bernoulli-Kette auffassen mit p = 5% , wenn man annimmt, dass das Auftreten von Fehlern stochastisch unabhängig mit gleicher Wahrscheinlichkeit erfolgt.

b) Mit $\mu = n \cdot p$ für die Binomialverteilung gilt hier $\mu = 22 \cdot 0{,}05 = 1{,}1$. Man kann also ein fehlerhaftes Zeichen erwarten.

c) Es handelt sich um das Ereignis E „Auftreten von genau zwei Fehlern bei der Übertragung einer Zeichenkette von 22 Zeichen“.
Die Berechnung von P(E) kann mit der Formel für die Binomialverteilung geschehen $B(n,p,k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$, die in einer Bernoulli-Kette der Länge n die Wahrscheinlichkeit, genau k Erfolge zu erzielen, angibt.
Für die Aufgabe sind n = 22 , p = 0,05 und k = 2 einzusetzen.
Die Begründung kann z.B. anhand eines Baumdiagramms erfolgen: $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Wege für das genannte Ereignis mit der jeweils gleichen Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$ an. Diese ergibt sich aus der Multiplikationsregel für Wege in einem Baumdiagramm, da k Teilpfade die bedingte Wahrscheinlichkeit p und (n-k) Teilkanten die bedingte Wahrscheinlichkeit (1-p) besitzen.